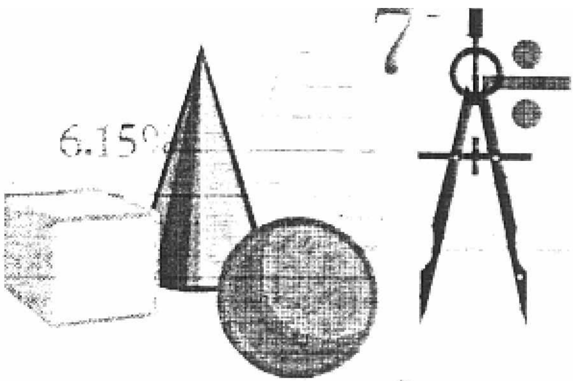
OSCAR PACHECO RÌOS

UN INTENTO DE FILOSOFIA DE LA



MATEMÁTICA

EDITORIAL CEPDI

SANTA CRUZ - BOLIVIA

Ficha Catalográfica

Autor: Oscar Pacheco Ríos
Título: Un Intento de la
Filosofía de la Matemática

Depósito Legal 8 – 1 – 00010 – 02

Primera Edición Septiembre de 2002

- -

Editado por CEPDI

Centro Pedagógico de Informática

cepdi@mail.cotas.com.bo

Impreso en Santa Cruz de la Sierra. Bolivia

LÉAME PRIMERO

*En lugar de colocar el título tan acostumbrado "***PREFACIO A LA SEGUNDA EDICIÓN***" y queriendo ser consecuentes con lo que decimos más adelante, igual que en un programa interactivo de computación hemos colocado el título que abre esta página.*

La primera edición salió a la luz, por la necesidad de tener un apoyo referencial para los alumnos del Instituto Normal Superior y para los colegas con quiénes alguna vez nos reunimos, y directa o indirectamente nos enfrascamos en esa tertulia que invariablemente nos lleva de un modo u otro a filosofar sobre la Matemática. Por tanto diríamos que este trabajo fue direccionado hacia ellos, pero, hoy después de recibir las sugestiones de los interesados consideramos que ese círculo puede ser ampliado a otros estratos, como los estudiantes de Economía, Ingeniería y/o Arquitectura en las universidades, pues, tienen mucho que ver con la Matemática. Especialmente, si luego de egresar muchos de ellos se tornan docentes universitarios, en consecuencia, consideramos que no les caerá nada mal, conocer a Rousseau y Piaget además de los otros. Y, nos atrevemos a decir más. Inclusive por convertirse en padres de familia y llegar a conocer, cómo, será el desarrollo mental de su progenie.

Aunque no lo dijimos en la primera edición, no fue tarea fácil poner en evidencia nuestra inquietud de que nos hace falta filosofar para cualificar nuestro trabajo, así, como el aprendizaje. Pues, no estamos de acuerdo a que nuestro aprendizaje esté limitado a la letra muerta de los textos oficiales, ya sea en los colegios o universidades, pues, estamos segurísimos de que todos podemos hacer ciencia y producir conocimiento y sobre todo con criterio propio. Si eso no fuera así .nos preguntamos ¿Cómo es que surgió, la "Geometría no-euclidiana"? ¿No será porque, los no-euclidianos, simplemente no se conformaron con lo que habían recibido hasta ese momento y arremetieron contra lo que parecía ser un edificio incólume como la "Geometría euclidiana"?

Hoy nos asoma una cuestión. El estudiar y aplicar respectivamente Matemática ¿Podrá seguir siendo lo mismo, cuando ya estamos en plena era de la *tecnología de punta liderada por la Informática. Y, aun más al ingresar al nuevo milenio?*

No dudamos que estas y otras cuestiones en los que después de haber leído este nuestro trabajo, también se harán presentes.

Entre esas otras cuestiones hay algunas que son subliminilales y, nosotros tenemos una que desde hace mucho tiempo nos viene picando el razonamiento. Es sobre nuestro modo de pensar e inferir dentro de los moldes occidentales y aunque no lo indicamos de modo explícito durante todo el trabajo, igualmente, de modo subliminal lo tocamos de alguna manera mediante los numerales tiwanakotas en la portada de este trabajo y otra al hacer referencia en el capítulo sobre la posibilidad de que los tiwanakotas o los incas hayan tenido su Euclides. Para muchos quizá esto les parezca contradictorio, pues, citamos a pensadores como Kant, sin ningún problema y utilizamos sus argumentos sobre las clases de juicio para intentar justificar nuestra posición y sin embargo estamos queriendo desmarcarnos de los moldes occidentales, pero, seguimos en ellos sin encontrar la salida. Parecería que en ese intento tomamos el "**pienso, luego existo**" *cartesiano, pero, de un modo contrario, al no poder romper esa moldura convertida en un automatismo en nuestro ser y sintiendo la infaltable presión del sistema, estaríamos diciendo:* "**pienso, luego desisto**", *mas al mismo tiempo, por ese status contradictorio y nuestro espíritu rebelde , realizamos una modificación en nuestro pensar y decimos* "**pienso, luego insisto**". *Por tanto, como un intento de poner en práctica esa insistencia, ésta la razón, por la que, en esta segunda edición, además de las respectivas correcciones hemos ampliado el capítulo concerniente a, ¿Y, por qué no los Tiwanakotas o los Incas? Con el teorema Matemático de la "Puerta del Sol" y su interpretación iconográfica tomada de la "*TU10*" de Javier Amaru Ruiz García*

Finalmente hubiéramos querido hacer lo mismo en los otros temas, mas, ello implicaría un nuevo planteamiento y por tanto ya no sería una segunda edición. Sin embargo pedimos disculpas por las limitaciones que subsistan y por lo que pueda parecer una verdad apodíptica y que no precisaba ser indicada o demostrada en este trabajo por ser los temas ampliamente conocidos para muchos.

El autor

UN INTENTO DE FILOSOFÍA DE LA MATEMÁTICA

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo viene a ser el resultado de una preocupación constante por mejorar el nivel de la enseñanza aprendizaje en general y de la Matemática en particular. Una reflexión profunda nos ha llevado a cuestionarnos, sobre:
¿*Cuál es la naturaleza del proceso de aprendizaje?*
¿*La enseñanza de la Matemática ha acompañado las transformaciones de la sociedad*?
¿*A quién y, qué Matemática debemos enseñar*?
¿*La Matemática es una ciencia*?

Y, así, con estas cuestiones nuestra reflexión nos ha llevado a pensar que, se debe ir a las fuentes filosóficas de la Matemática, mas, el querer hablar de una Filosofía de la Matemática, significa en principio necesariamente tener que hablar de lo que es la Filosofía en sí, por consiguiente para ello tener las bases del conocimiento filosófico mediante un curso previo de Filosofía y como es posible que muchos o pocos de nosotros no tengamos el tal curso, vamos a utilizar lo dicho por J. M. Bochensky, Cuando trata de definir lo que es Filosofía en su libro "Directrices del Pensamiento Filosófico". *"Filosofía es un asunto que no sólo interesa al especialista, porque – por extraño que parezca- probablemente no hay hombre que no filosofa o por lo menos, se torna filósofo en alguna circunstancia de la vida". "Lo importante es que todos filosofamos". "Por este motivo es importante para todos la pregunta: ¿Qué es la Filosofía?". "Es esa, infelizmente una de las cuestiones más enmarañadas" "Existe la opinión general de muchos positivistas como la de Lord Bertrand Russell, que Filosofía es un concepto colectivo para todo lo que todavía no puede ser descubierto e investigado cientí-*

ficamente la misma cosa, pero que más tarde las diferentes ciencias se tornan independientes" "Un objeto exclusivo de la Filosofía no existe. Filosofía significa simplemente una tentativa de dar soluciones a problemas que aun no están maduros para ser resueltos por la ciencia". Mas, lo que hay de notable, es el hecho de que cuándo una ciencia se torna independiente de la Filosofía, surge casi siempre una Filosofía paralela. Por ejemplo, cuándo la "*Lógica Formal*" se separó de la Filosofía, surgió inmediatamente una vasta y acaloradamente discutida Filosofía de la Lógica. Esto porque la Filosofía en vez de indicar cómo desarrollar las ciencias, se torna siempre más viva y más rica. A ello se debe que la Filosofía. - con martilladas – continua los nuevos y profundos resultados técnicos demoliendo viejos conceptos y en Matemáticas las discusiones filosóficas pueden ser hechas con real provecho ignorando esos desarrollos técnicos.

El presente estudio es un pequeño ensayo (intento) en el que trataremos los problemas relacionados al Desarrollo Mental desde la perspectiva de Rousseau y Piaget. Los problemas Filosóficos sugeridos por la Matemática y el Conocimiento, Empírico y a Priori, Analítico y Sintético, La textura abierta del lenguaje, la Geometría Euclidiana y No-Euclidiana, los Números, la Topología y la Evaluación, entre los temas más sobresalientes. Posiblemente se observarán algunas apreciaciones que puedan ser mejoradas o quitadas, si ello nos ayuda a cuestionarnos para poder comprender mejor la verdad y la realidad de:

¿Qué es lo que aprendemos y cómo aprendemos, así, cómo enseñamos?

Una cuestión que nos permita observar y reformular nuestros tradicionales conocimientos (conceptos). Haciéndonos comprender que no es necesario ser *matemático* ni *filósofo* para filosofar sobre Matemática. Observación que nos ayude a reflexionar y vislumbrar una mejor *Educación* de cómo y por qué aprendemos y/o enseñamos Matemática dentro de nuestro contexto actual y su proyección futura.

También es posible, que no se hallarán todas las respuestas deseadas a nuestras preguntas, por una simple razón. En realidad este nuestro trabajo antes que un estudio, es un *intento de hacer filosofía*. Por ello lleva ese título. Mas, es sabido que quien formula una pregunta, ya tiene la mitad de la respuesta, la otra mitad tendremos que buscarla, no sólo en este estudio mas, en cualquier otro que sea afín a nuestra cuestión, o indagando con otros, igualmente interesados en actualizar sus conocimientos. Especialmente. Cuando estamos ingresando en pleno, a la era de la informática y teniendo el mundo en nuestras manos mediante esa gran carretera de la información llamada Internet y con ella al nuevo milenio.

Queremos indicar que, quizá al concluir el estudio parecerá que nos encontramos desorientados o insatisfechos, si sentimos eso, significará que vamos por buen camino, y ya no aceptaremos ciegamente cualquier conocimiento que nos quieran impartir, lo cuestionaremos y así haremos que nuestros pupilos y colegas también nos cuestionen. Es decir reestructuraremos nuestra forma de pensar y razonar y ello nos tornará más críticos y más creativos, sin necesidad de llegar a ser necesariamente Filósofos y Matemáticos, mas sí, mejor que lo que hasta ahora somos.

ROUSSEAU Y PIAGET

Antes de iniciar nuestro intento, intuimos que surgirá mas de un lector preguntándose cuál la razón de iniciar tal intento con un Rousseau y un Piaget. ¿No resulta contradictorio o inapropiado hablar Psicología en temas de Filosofía? Una posible respuesta es que, la educación del aprendiz por el cual nos preocupamos y filosofamos, no es un ente departamentalizado por especialidades es un conjunto global en el que prima su estado bio-psicológico y posiblemente por tal razón Piaget, siendo Biólogo se tornó Psicólogo.

¿Porqué queremos hacer, un estudio sobre la Filosofía de la Matemática? ¿Cuál el sentido o la razón de este estudio?

Respuestas tendremos muchas, pero consideramos que la razón principal como ya lo indicamos antes, es una sola, la de una Educación cualitativa, a la cual estamos ligados directa o indirectamente todos los que conformamos la "Comunidad Educativa"[1]. Aquí surge otra cuestión. ¿Qué papel les toca a Rousseau y Piaget en la filosofía de la Matemática?

Como no tenemos una respuesta que satisfaga a todos, por lo tanto tendremos que filosofar según lo indicado por Bochensky: "*Filosofía es un asunto que no sólo interesa al especialista*" y como ambos se preocupan por la educación no dudamos que ambos nos ayudarán desde su perspectiva (Rousseau desde la génesis del conocimiento naturalista y Piaget desde la génesis de la sicología cognitiva), a ver el desarrollo de la inteligencia, toda vez que, el cuestionarnos o filosofar, es un acto inteligente. Esto, no significa negar la existencia de otros altos exponentes de la Educación y la Filosofía Educativa, para quienes guardamos nuestro mayor respeto.

[1] Dentro de esta expresión se encuadra la Familia, la Escuela y la Sociedad a la que pertenecemos todos ya sea de modo circunstancial o contextual y por tanto estamos envueltos en la problemática educativa.

JEAN JACQUES ROUSSEAU

Escritor y filósofo francés (1712-1778). Autor de Julia o la nueva Eloísa, Emilio, El Contrato Social, Confesiones, etc. Colaboró en la Encyclopedie, y fue uno de los precursores de la revolución francesa.
Influyó en el educador alemán Friedrich Fröbel, en el suizo Johann Heinrich Pestalozzi y en otros pioneros. Varias de las características de la Educación Moderna tienen sus raíces en las teorías educacionales de este escritor y filósofo. Tales teorías a su vez decorrieron de los progresos sociales de su época, los cuales llevaron al aparecimiento de la sociedad industrial moderna y al gobierno democrático, la comprensión de sus teorías, de su origen y de sus consecuencias ayudará a separar lo verdadero de lo falso en el pensamiento de los educadores actuales, en lo bueno o lo malo de aquello que se hace en las llamadas escuelas.
Para Rousseau, el hombre es un ser naturalmente bueno, la civilización lo aprisiona, lo deforma y lo corrompe, por ello es necesario quitar esas restricciones de las convenciones sociales, se debe ayudar al educando a desarrollar sus tendencias que son hereditariamente buenas. Hay tres factores que trabajan juntos en la Educación dice él: "*La Educación nos viene de la Naturaleza, de los hombres y de las cosas. El crecimiento interno de nuestros órganos y las facultades constituyen la educación dada por la naturaleza*", como de esos tres factores, la Naturaleza es la única que está enteramente fuera de nuestro control, debe ser lo dominante. Por lo tanto la Educación consiste en actividades que favorecen el crecimiento "natural" del niño. Si la principal función del educador[2] es estimular el desarrollo de los poderes naturales del niño, evidentemente, el educador precisa conocer esos poderes, como uno de los primeros requisitos, máxime, si se considera un buen educador, debe reconocer que el niño es diferente al adulto. Como la iniciativa permanece con el educador deberá tener mucho cuidado al escoger que va a

[2] Utilizaremos siempre que se pueda esté nombre en lugar de profesor, pues, consideramos que en el nombre estará implícito, también el progenitor como primer educador.

permitirle ayudar en el aprendizaje y cómo se debe ser dirigida dicha ayuda.
Todo aprendizaje del niño debe ser dirigido tomando en cuenta, esencialmente sus intereses, su curiosidad y su desarrollo biológico.
Debe en principio: "*colocar los problemas delante el alumno y dejar que él, los resuelva por si mismo, no permitir que aprenda con la información que Ud. le dé, mas, sí, porque lo descubrió por si mismo. Si algún día Ud. sustituye la razón por la autoridad, el alumno dejará de razonar, será apenas un juguete del pensamiento de los otros*" En otras palabras, podemos decir que, Rousseau propuso una teoría filosófica educacional tomando el medio como factor activo primario, dirigida para lo que se va a coadyuvar en el aprendizaje. Quizá por ello, dicha teoría ha marcado el sello de la mayoría de los movimientos pedagógicos hasta la actualidad.

JEAN PIAGET

Piaget, Jean (1896-1980), psicólogo y lógico el más importante de los investigadores modernos de los procesos del pensamiento en los niños. Sus estudios tuvieron un gran impacto en el campo de la psicología infantil y de la educación.

Nacido en Neuchâtel (Suiza), Piaget escribió y publicó su primer trabajo científico cuando tenía sólo diez años. Estudió en la Universidad de Neuchâtel, y tras doctorarse en biología a los veintidós, comenzó a interesarse en la psicología, disciplina que estudió y en la que desarrolló sus investigaciones primero en Zurich y después en la Sorbona, París, donde inició sus estudios sobre el desarrollo de las capacidades cognitivas. Entre los aportes más significativos de Piaget a la psicología experimental se cuentan sus enfoques genéticos y del desarrollo. En su sistema sostiene que el desarrollo cognoscitivo o intelectual es un avance gradual apuntado hacia una adaptación más eficiente y total con el medio ambiente, con un equilibrio cada vez más completo en los procesos psicológicos, y que las operaciones simbólicas propias del pensamiento son derivadas de las interacciones concretas de la persona con los objetos reales. Se le considera el padre de la pedagogía moderna Entre sus planteamientos pedagógicos se cuentan el incorporar los juegos que naturalmente interesan a los niños.

Todo el mundo habla de Piaget, mas, pocas personas lo han leído realmente. Sus puntos de vista son en general mal interpretados y mal comprendidos. En el intento de respondernos a nuestra tercera cuestión hemos considerado que un resumen cuidadoso y necesario de uno de sus trabajos podrá aplacar en parte esa cuestión.

A continuación tenemos doce características importantes, las mismas que deberán tomarse en cuenta mas como sugestivas antes que conclusivas.

1. Si Rousseau ya nos da la pauta de que el niño debe actuar por sí mismo. Piaget afirma que *la base de todo conocimiento es la actividad del niño.* Cuando este inter-actúa en su medio físico y social. Luego ya no es sólo, el natural como nos indica Rousseau.

2. La actividad mental del niño es organizada en estructuras. Distintos actos mentales relacionados entre sí y reunidos en agrupamientos llamados "*esquemas*" o padrones de comportamiento.

3. La actividad mental de la misma manera que la metabólica, es un proceso de adaptación al medio. La *adaptación* consiste de dos procesos opuestos, pero inseparables: La *asimilación* y la *acomodación*.
   La ***asimilación*** es un proceso por el cual el niño adapta cada experiencia nueva a sus estructuras mentales preexistentes. Por el funcionamiento de estas estructuras, el niño interpreta las nuevas experiencias a la luz de las antiguas. El proceso de asimilación es un tipo de inercia de las estructuras mentales, con una tendencia a persistir

de esas estructuras. Entre tanto como la incorporación de nuevas experiencias sobre las antiguas, inevitablemente, modifica las últimas.

La ***acomodación*** es el proceso de perpetua modificación de las estructuras mentales para ir de encuentro a las exigencias de cada experiencia particular. La acomodación es la tendencia de las estructuras mentales a cambiar bajo la influencia del medio. Esto ratifica la afirmación de Rousseau, al indicar que *el medio corrompe al niño.*

4. El crecimiento mental es un proceso social. El niño, no inter-actúa con el medio físico como un individuo aislado, mas sí, como parte de un grupo social.

   Consecuente el medio social es un intermediario entre él y el medio físico. Su interacción con otras personas desempeña un papel importante en el desarrollo de la visión que tienen en el mundo, pues, solamente a través de un intercambio de ideas con otras personas se torna consciente de su carácter subjetivo y unilateral de su propio punto de vista. Sólo combinando los puntos de vista con los otros, con el suyo propio, él, progresa de una visión subjetiva hacia una actitud objetiva.

5. Aunque la acomodación al ambiente significa una modificación continua de los esquemas o padrones de comportamiento del niño. Tal transformación no es apenas cuantitativa. Con el correr de los tiempos, las estructuras mentales sufren también transformaciones cualitativas y a medida que el niño crece de la infancia a la madurez, sus modos, características de actuar y pensar, cambian diversas veces; nuevas estructuras mentales emergen de las antiguas, que fueron modificadas por la acumulación de acomodaciones.

   Piaget, considera que, el niño pasa por cuatro etapas o niveles distintos al desarrollo mental, a las cuales llama de etapas *sensomotora; preoperacional; de operaciones concretas y de operaciones formales.*

En la etapa *sensomotora* que se extiende desde el nacimiento hasta la edad aproximada de 18 meses, los reflejos heredados son gradualmente modificados por la experiencia y combinados en padrones complejos de comportamiento. Su actividad se torna cada vez menos centrada en su cuerpo y más en los objetos. Por la manipulación de los objetos, el niño descubre la relación entre los medios y los fines.
Finalmente descubre que los objetos existen aun cuando él no los percibe.

La etapa *preoperacional*, va de los 18 meses hasta la edad de seis o siete años. En esta etapa la actividad sensomotora es acompañada por la actividad mental, basada en la representación mental de los objetos y de la anticipación mental de las actividades. Al principio son símbolos suyos, particulares, y después, cuando comienza a hablar, son símbolos socialmente padronizados del lenguaje hablado. Tiene una visión egocéntrica de los objetivos y acontecimientos, pues, no consigue ver las cosas desde otro punto de vista que no sea, el suyo, teniendo dominado el pensamiento, por lo que ve en el momento. Al examinar la transformación de un estado inicial y no en el final ignorado, en la transformación no percibe que una puede compensar con la otra. Por ej. Una bola de arcilla (barro) es transformada en un cilindro alargado como una salchicha, su largo aumenta más y su grosor disminuye. En esta etapa preoperacional el niño fija su atención en el aumento de la longitud y concluye que la salchicha contiene más arcilla por ser más larga que la bola inicial. No ve que al decrecer en el grosor compensa con el aumento de la longitud.

No percibe en esta etapa que la masa de un cuerpo es conservada cuando es sometida a modificaciones de forma y tamaño, esto en virtud de su tendencia a fijar la atención sobre un único factor por cada vez, llega muchas veces a conclusiones contradictorias, cuando desvía su atención de un factor para otro. En consecuencia percibe mal, la relación entre la parte y el todo, o entre elemento y conjunto o entre subconjunto y conjunto.

Entre las edades de 7 a 11 años, el niño está en la etapa de las operaciones concretas, en la cual ya se distinguen, el concepto de número cardinal del concepto de una hilera de objetos. Sabe que la masa de un objeto no es alterada cuando cambia de forma y el número cardinal asociado a un conjunto permanece inalterable cuando se modifica el orden de los elementos del conjunto. Domina la relación de inclusión, comprende la propiedad transitiva de las relaciones de orden, siendo capaz de formar conjuntos ordenados y establecer correspondencias biunívocas que preserven, el orden.

El niño pasa del estado *preoperacional* para el de las *operaciones concretas*, cuando sus actos mentales antes aislados y no relacionados son finalmente organizados en esas estructuras semejantes a un grupo matemático.

Piaget llama las *operaciones mentales* del niño entre siete a once años, como el de las *operaciones "concretas"*, porque el punto de partida de esas operaciones es siempre algún sistema real de objetos y relaciones que él percibe sensorialmente. El niño en esta etapa es capaz de organizar y ordenar, apenas cosas que le son inmediatamente presentes.

La etapa de las *operaciones formales*, se inicia a los once o doce años. Es la etapa del pensamiento adulto. Es decir que se pasa de la habilidad de pensar a la de operaciones formales, cuando comienza a razonar sobre las cosas que no ve, cuando es capaz de razonar sobre la virtud tanto como sobre lo real. En esta etapa, el niño es capaz de usar el análisis combinatorio para formar todas las combinaciones posibles de esos factores, uno por cada vez, dos por cada vez, tres por cada vez y así sucesivamente. Es capaz de formar hipótesis y de ellas sacar conclusiones y comprobarlas, confrontándolas con la realidad. O sea, es capaz del pensamiento científico y del raciocinio formal, matemático formal. Como el raciocinio formal envuelve proposiciones sobre proposiciones. Piaget, a veces se refiere a las operaciones formales como operaciones de segundo grados.

6. De acuerdo a este psicopedagogo, la *percepción* no es apenas un registro pasivo de sensaciones creadas por los órganos de los sentidos. Ella debe ser entendida como actividad perceptiva, en la cual, el cerebro del niño organiza las sensaciones reunidas en el decorrer de la actividad exploratoria. Su percepción de espacio, por ejemplo, es compuesta por las imágenes formadas por la retina del ojo, por las sensaciones cinestéticas y mover y focalizar los ojos por la coordenación de las manos y de los ojos para alcanzar las cosas, tomar y moverlas, arreglarlas, etc. La capacidad de recibir del niño, así como su habilidad de pensar, se desarrolla con la edad.

7. Decorre cierto tiempo entre el desarrollo y la habilidad de percibir un objeto y el desarrollo de la habilidad de formar una imagen mental de ese objeto, cuando el objeto no está perceptivamente presente.

8. En el desarrollo de los conceptos de espacio, surgen primero nociones topológicas de vecindad o acercamiento, separación, orden, frontera y continuidad. Las nociones proyectivas euclídeas, surgen mas tarde [3]

[3] Este punto de vista parece ser contrario al de T. Gr. Bowen, que realizó experiencias concretas que demuestran que los niños entre 6 y 8 semanas son capaces de conocer tamaño y forma de un objeto (propiedad euclídea), aunque la imagen retiniana es modificada por las variaciones de distancia y de la orientación del objeto.

9. Durante el desarrollo del concepto de números, la comprensión del número cardinal, así, como de las relaciones de orden, crece lado a lado.
10. A medida que el niño avanza hacia la madurez, su pensamiento progresa. De una visión de corto alcance, estática y egocéntrica, hacia una coordenación dinámica de largo alcance con muchos puntos de vista. Esa evolución es marcada por el surgimiento de una serie de conceptos de conservación: primero la conservación objeto, luego de masa, volumen, etc.

11. El orden en cual el niño progresa en las cuatro etapas del desarrollo mental es fijo, mas, la velocidad con la cual él progresa, no es fija. La transición de una etapa a otra puede ser apresurada por una experiencia enriquecedora y/o por un buen aprendizaje. Piaget, explica esa idea en su trabajo "*El desarrollo del pensamiento lógico de la infancia hasta la adolescencia*" La maduración del sistema nervioso puede apenas determinar la totalidad de las posibilidades e imposibilidades de una determinada etapa. Un medio social particular e indispensable para la realización de esas posibilidades. "*Si se sigue su realización, puede ser aclarada o retardada en función de las condiciones culturales y educacionales*"

12. Piaget construyó modelos matemáticos elaborados para las estructuras mentales características de las etapas de operaciones concretas y operaciones formales. Como esos modelos dan poca luz sobre el arte de coadyuvar en el aprendizaje evitaremos referirnos a ellos.

En estos rápidos resúmenes podemos comprender, por un lado la teoría de Rousseau que enfatiza la importancia de la participación voluntaria del alumno y *no sólo saber que se va a enseñar, mas cómo se va a enseñar,* parafraseando nosotros diríamos: "no sólo saber qué se va aprender, mas, cómo aprender". Por el otro lado Piaget nos hace ver que el desarrollo mental contiene complejidades y más aun si esta teoría se la quiere asimilar en forma resumida, lo que no le hace justicia a su creador.

Seguramente, a lo largo de este capítulo ha estado latente una pregunta. ¿Y, qué tienen que ver estos señores con la Filosofía de la Matemática? Una posible respuesta de las muchas que podríamos esgrimir. Es que tiene que ver y mucho, pues, por ejemplo, siguiendo lo indicado en los acápites 10. y 11. Podemos hacer que el niño al mismo tiempo de elaborar sus conceptos, lo haga con un juicio crítico, con una cuestión muy simple ¿por qué? Si él elabora su concepto de que "*el perímetro del rectángulo es igual a la sumatoria de la longitud de los lados paralelos dos a dos*" podría cuestionarse y decir: *¿por qué estoy asumiendo este concepto? ¿No habrá otra forma de expresarlo mismo?*. Mas no tratemos de concluir aquí nuestro tema, veámoslo en los siguientes capítulos.

PROBLEMAS SUGERIDOS POR LA MATEMÁTICA

Desde que la Filosofía comenzó entre los antiguos griegos, la Matemática ha sido una de las grandes fuentes de cuestiones filosóficas. Para los griegos, la Matemática era predominantemente Geometría. Basta recordar que Platón, al fundar la Academia hizo inscribir en el frontispicio:

"Que nadie entre aquí, sino sabe Geometría"

″ΜΗΛΕΣ Α ΓΕΩΜΤΡΟΣ ΕΙΤΩ ΜΟΨΤΗΣΕΓΗ″

Al estudiar Geometría según las líneas tradicionales se presentan una gran cantidad de problemas filosóficos. Y, los problemas surgen de inmediato en los primeros pasos de la disciplina. Euclides define el punto: "*Punto es aquello que no tiene partes*". ¿Cómo entender tal definición? ¿Sería posible que exista alguna cosa, no constituida de partes? ¿Y, admitiendo su existencia, podríamos ver esas cosas o conocerlas? La Geometría de Euclides fue encarada por muchos estudiosos, como la descripción del mundo físico, es difícil sin embargo, creer que el mundo sea formado de puntos. En efecto si, el punto no tiene extensión, un conjunto infinito de puntos no bastaría para construir un volumen en el espacio. ¿Serían los puntos apenas ideas de nuestra mente? ¿O, serían cosas insobornables? En cualquier caso. ¿Por qué los arquitectos e ingenieros aplican los principios de la Geometría? ¿Son verdaderos los principios de la Geometría? ¿Cómo adquirimos – si es que llegamos a adquirir – los conocimientos geométricos? ¿Por qué se aplica la Geometría al mundo observable?

El aparecimiento de la Geometría No-Euclidiana avivó aun más las controversias. Si esta Geometría que incluye leyes incompatibles con las leyes de la Geometría euclidiana, son legítimas desde el punto de vista matemático. ¿De qué modo podemos concebir la verdad Matemática? ¿Si una ley es *incompatible* con otra, las dos no pueden ser verda-

deras? ¿Habrían, los matemáticos abandonado la noción de verdad? En ese caso. ¿Para qué estudian Geometría? ¿No siendo, una búsqueda de la verdad a cerca del espacio, qué significado tiene la Geometría?
En la Matemática de los números también se presentan, una gran porción de cuestiones semejantes. Se pregunta sobre el significado de los términos empleados, sobre la posibilidad de alcanzar la verdad y hasta inclusive, si la noción de verdad, podría ser buscada en esa parte de la Matemática. Se cuestiona sobre el conocimiento adquirido – repetimos, si es realmente adquirido - y sobre la posibilidad de explicar las leyes de los números al mundo real. En conexión con la Matemática de los números, un nuevo problema, un tanto diferente se presenta: El problema de la existencia de la Matemática. En Geometría es posible entender los principios de modo hipotético, sin pensar que ellos aseveren la existencia de algunas cosas: "*Si existe una figura que es un triángulo, entonces la suma de sus ángulos internos es igual a dos ángulos rectos*". Nada nos obliga a aumentar a la Geometría: "*Existe un triángulo*". En la Matemática de los números, por otro lado hay muchas leyes que aparecen de hecho, aseveran la existencia de ciertas cosas, así: "*Existe un número* **n** *tal que el producto de* **n** *por* **m** *es igual a* **m**". Esa especie de ley parece garantizar de modo definido, la existencia de algo (el número 1) de modo que no se torne fácil como en el caso de las leyes geométricas, en las que se da un sentido hipotético. No obstante. ¿Qué tipo de existencia estaría en nuestra mira? ¿Con qué especie de realidad trabaja por otra parte, la Matemática? ¿Se debe entender el enunciado de la existencia, en sentido literal, en sentido figurado?

Esos son algunos de los problemas filosóficos y ahí los tenemos, pues las preguntas generan cuestiones a cerca del significado, verdad, realidad y conocimiento. Los matemáticos preocupados con el desarrollo de su especialidad, no acostumbran a dar a esas cuestiones fundamentales, sino, una ligera atención pasajera y superficial: "*Sí, está bien. Mas, esa es la ventaja del matemático, pues, esos supuestos problemas, no pasan de confusos pseudo problemas. Ese tipo de especulación filosófica a propósito de la Matemática no tiene ningún interés*". La observación es exagerada. Muchas perplejidades filosóficas originadas por la Matemática pueden de hecho, ser simples errores de interpretación, sin embargo los problemas son serios desde el punto de vista intelectual, por cuanto los errores que se originan están lejos de ser engaños de fácil eliminación - al contrario, son engaños frecuentes e importantes – Los problemas merecen atención, no podemos ignorarlos sumariamente, sin intentar resolverlos. Quién en vez de deshacerlos, los corta por la mitad, esta destinado a perderse temprano.

EL CONOCIMIENTO "A PRIORI" Y EL EMPÍRICO

Antes de abordar los problemas especiales de la Filosofía de la Matemática tenemos que dejar claras algunas distinciones que los filósofos consideran importantes y que en verdad se las debe recordar al discutir el motivo de nuestro estudio. La primera distinción – la, que los filósofos hace mucho, vienen dando atención – es la que se establece entre el conocimiento "a priori" y el conocimiento empírico (o también "a posteriori")

Tradicionalmente, pensadores racionalistas son aquellos que sustentan la primacía del conocimiento "a priori", empiristas son aquellos que atribuyen mayor importancia al conocimiento empírico. Una de las cuestiones que se considera fundamental en la Filosofía de la Matemática es saber si el conocimiento matemático (admitiendo que exista) es empírico o "a priori". No obstante la distinción entre las dos especies de conocimiento, no siempre fue enteramente manifiesta.

El término empírico significa "basado en la experiencia" – quizá, de ahí se tenga: "*la experiencia es la madre de la ciencia*" - y la expresión "a priori", significa: "posible de obtener antes de la experiencia". Por tanto. ¿Cómo entender estas dos expresiones?

Los filósofos del pasado admitieron que la distinción entre el conocimiento empírico y “a priori” estaba asociada a una presumida diferencia entre conceptos empíricos y “a priori”, sustentando que el conocimiento que envolviese conceptos empíricos debía ser empírico y que el conocimiento que envolviese conceptos “a priori”, debía ser “a priori”. Admitiendo que los conceptos empíricos correspondían a las ideas “abstraídas” por la mente a partir de todo lo que es “dado” en la experiencia sensorial y que los conceptos “a priori” correspondían a ideas fijadas en la mente por otra vía. Este modo de ver, no en tanto, padece de dos defectos. En primer lugar, aunque se aceptara la división de los conceptos empíricos y “a priori”, admitiéndose como legítima y bien fundada esa división, no queda apartada la posibilidad de que existan conocimientos “a priori” que no sean exclusivamente traducibles en términos de conceptos “a priori”. En segundo lugar – y ese punto es el más importante – para considerar entre distinción entre conceptos empíricos y “a priori”, no tiene un sentido completo. Se siente una teoría psicológica de la “abstracción” entendida como proceso casi mecánico por el cual, el espíritu elabora aquello que es “dado” en la experiencia sensorial.

Los filósofos aceptaban que, una persona, al contemplar un objeto rojo, era capaz de “abstraer” la “dada” idea de rojizo, sin poder, no en tanto, abstraerla idea de la virtud cuando la cosa es virtuosa. No decía sin embargo, en qué sentido, las dos situaciones diferían. En consecuencia, por fuerza de la influencia de las teorías psicológicas ultrapasadas, la distinción entre conocimientos empíricos y “a priori” queda bastante oscura. Por tanto debemos intentar ver la diferencia de una manera más adecuada.

Supongamos que alguien sepa que los papagayos sean verdes, que el Libertador Bolívar nació antes que el Mariscal Sucre, que las moléculas del agua son formadas por tres átomos una de hidrógeno y dos de oxígeno, que tendremos lluvia porque el cielo está nublado. Estos son ejemplos definidos de aquello que los filósofos consideraban conocimiento empírico. Cada uno de tales conocimientos está respaldado por la experiencia en el sentido siguiente, para saber cualquiera de aquellas cosas, la persona no precisa apenas entender lo que significa, como el tener evidencia de aquellas tomadas de las experiencias sensoriales, es decir, evidencia relativa a lo que se vio, sintió, oyó, olió o degustó. Para saber que los papagayos son verdes, debemos apenas entender, lo que eso quiere decir, pero, debemos haber visto papagayos o las plumas de esas aves, o debemos haber oído la narración de otras personas que las vieron – o algo de esa naturaleza – Es posible que alguien, aun sin evidencias, pueda creer que los papagayos son verdes, que el Libertador Bolívar nació antes que el Mariscal Sucre, que las moléculas del agua son formadas por tres átomos una de hidrógeno y dos de oxígeno, que tendremos lluvia porque el cielo está nublado. Creencias tales, que sin embargo aun cuando sean verdaderas no son conocimientos, si les faltan justificaciones. La cuestión es ésta: apenas las observaciones sensoriales pueden ofrecer el tipo de justificación de que una persona necesita, a fin de estar en condiciones de decir que, conoce hechos de esa naturaleza. Si no disponemos de alguna evidencia observacional relativa a los papagayos, es falso, por cierto que sabemos que ellos son verdes. Es auto-contradictorio afirmar que se sabe algo de esa naturaleza, sin saberlo a costa de la evidencia ganada por la experiencia sensorial. Por tanto, podemos decir que: *el conocimiento empírico requiere de una justificación de la experiencia.*

Hay dos tipos de conocimiento en que - sin embargo- la influencia de la experiencia es diversa. Imaginemos que alguien sepa que *los papagayos son aves*, que *el Libertador Bolívar nació o no antes que el Mariscal Sucre*, que *las moléculas de hidrógeno o las de oxígeno son moléculas*, que *tendremos lluvia, porque el cielo se nubla.* Aquí tenemos conocimientos claros de lo que los filósofos entendían por conocimiento "a priori" – Una persona no precisaría: haber examinado directa o indirectamente para decir lo que son los papagayos; Necesariamente haber estudiado Historia Latinoamericana para saber que el Libertador Bolívar nació o no antes que el Mariscal Sucre; Haber realizado expe-

rimentos físicos para saber la cantidad de moléculas hidrógeno y oxígeno que tiene el agua; Revisar los informes meteorológicos, para saber si va a llover o no, si le basta dirigir su mirada al cielo.
En cualquiera de los casos la única experiencia necesaria es aquella, - sea cual fuere – que habilita a una persona a entender las palabras en que el conocimiento se explica, sin ninguna experiencia adicional necesaria para justificar la afirmación que se conoce de alguna cosa. En resumen podemos definir que *el conocimiento "a priori" es aquel conocimiento que no necesita de justificación por la experiencia.*

Esa distinción entre conocimiento "a priori" y conocimiento empírico es de importancia filosófica, tanto para las aclaraciones que presta cuanto por los problemas que genera. Nos ayuda comprender, que materias como Física, Biología e Historia – Principalmente preocupadas con cuestiones relativas al conocimiento empírico – Deben estar asentadas en las observaciones si se desean ser establecidas sus conclusiones. En oposición, una materia como la Lógica, digamos se preocupa por el conocimiento "a priori" (la Lógica busca obtener conocimiento "a priori" de las reglas que gobiernan la validad de los argumentos de los argumentos), no necesita por tanto, de las observaciones para alcanzar sus conclusiones. Esto visto así, surge una cuestión y la Matemática: ¿Será sobre este particular semejante a la Física? ¿O semejante a la Lógica? ¿O será semejante en parte a ambas? Una cuestión filosófica general que la distinción también coloca, es saber: ¿De qué manera se obtiene el conocimiento "a priori" por medio de una visión especial de la realidad? ; O, de nuestro propio espíritu, por medio de la comprensión del lenguaje; O, ¿ De qué otra forma?. ¿Si el conocimiento matemático fuera "a priori", no basado en la experiencia, entonces en qué se fundamenta?

Asociada a la distinción entre conocimiento empírico y conocimiento "a priori", esta otra distinción muy importante: que establece entre dos tipos de raciocinio; la *Deducción* y la *Inducción*. No trataremos de caracterizar las nociones de un modo preciso, limitándonos a acentuar apenas de qué modo ellas difieren una de la otra. ***Deducción*** es el raciocinio en que se puede saber; "a priori", que no habiendo error lógico y siendo verdaderas las premisas, la conclusión también tendrá que ser verdadera. Veamos este ejemplo: "Todo número par es divisible por dos"; "Ningún número primo es divisible por dos; luego, ningún primo es divisible por dos, ningún primo es par". No hay aquí ningún error lógico, podemos saber, "a priori", que la conclusión tendrá que ser verdadera si las premisas fueron verdaderas. Ahí tenemos un ejemplo del tipo de conocimiento que trata la lógica ya que el argumento deductivo es válido en virtud de su "forma lógica". En otras palabras, relativamente a cualquier argumento de la forma: "Todo *PPP* es *qqq*; ningún *OOO* es *qqq*; luego ningún *OOO* es *PPP*, se puede saber "a priori", que siendo verdaderas las premisas, la conclusión tendrá que ser verdadera. En la Lógica, la noción de la forma lógica está solamente relacionada al arreglo de los vocablos "todo", "ninguno", "es" y de otros vocablos lógicos, inclusive de vocablos, como: "algunos", "no", "y", "o", "si" y "entonces". La Lógica no considera una forma del tipo "*P* es más que .... *q*" y "*q* es más que ... *r*". "luego *P* es más que .....*r*". El raciocinio es sin embargo perfectamente válido, pues sabemos, "a priori", que si las premisas fueran verdaderas, la conclusión tendrá que ser verdadera. Contrastando con la deducción, la ***Inducción*** es un raciocinio en que la conclusión obtenida expresa una conjetura empírica, mucho más amplia de lo que expresan los datos. No se puede por tanto, saber "a priori", que la conclusión será verdadera, si los datos fueran verdaderos. Por ejemplo. Imaginemos que hayamos observado muchos papagayos, constatando que todos eran verdes. Podemos entonces razonando inductivamente, decir, que muy probablemente, los papagayos son verdes. El valor de verdad de mis datos no constituye garantía "a priori" para la conclusión de que todos los papagayos deban ser verdes. En la mejor de las hipótesis, lo que se puede decir, es que los datos apoyan y confirman la conclusión sin garantizar el valor de verdad.

La distinción entre *deducción* e *inducción* está asociada a la distinción entre conocimiento "a priori" y empírico de este modo; al ofrecer una demostración de un enunciado “a priori”, demostrando que es un hecho, algo que se sabe ser verdadero, no hay motivo para que la demostración deje de ser deductiva, en cada uno de sus pasos. Nunca debe ser necesario emplear raciocinios inductivos para establecer una conclusión que sólo encierra conocimiento “a priori”. Al establecer sin embargo una conclusión de carácter empírico, por lo menos uno de los pasos del raciocinio debe ser inductivo, una conclusión empírica, no podrá jamás ser establecida por medio del raciocinio integral deductivo.

CONOCIMIENTO ANALÍTICO Y SINTÉTICO

Además de debatir, la distinción entre conocimiento “a priori” y empírico, los filósofos también se preocupan con la distinción entre conocimiento *analítico* y *sintético*. Esta última distinción fue introducida por el pensador y filósofo alemán Enmanuel Kant. Y, desde el siglo XVIII ha sido fuente de innumerables discusiones. En el intento de explicar la distinción entre conocimiento *sintético* y *analítico*. Kant se valió de la noción de juicio. Según este pensador, saber alguna cosa o tener una creencia de cualquier especie, es haber elaborado un juicio, el juicio puede haber sido elaborado conscientemente o inconscientemente, y puede no haber sido expresado en palabras para ser pronunciado en la forma de un enunciado (o juicio). Kant, describía el acto mental de formular un juicio, como un acto de ligación de conceptos reunidos en la conciencia. Según esa manera de ver, alguien que sepa que todos los solteros son personas no-casadas, reunió en su conciencia, el concepto de soltero y el concepto de no-casada (ligándose de la manera que la lógica denomina universal afirmativa). De modo análogo, alguien que sepa que ninguna gallina ladra, reunió en su conciencia, el concepto de gallina y el concepto de ladrar (formando la conexión universal negativa).

Kant imaginó, que una distinción debía ser establecida entre dos tipos de juicios básicamente diversos. Esta distinción es parecida a la que la

Química establece entre la *Síntesis* – el acto de colocar juntas cosas que no están combinadas y que eran diferentes – y el *Análisis*, el acto de aislar, de alguna cosa sus componentes. En relación, a los juicios, por un lado se hallan aquellos en que la mente sintetiza o reúne conceptos de un modo que no refleja cualquier conexión intrínseca que ambos puedan tener; el juicio según ninguna gallina ladra es un ejemplo de un juicio sintético, pues no hay nada en el concepto gallina que incluya intrínsecamente el ladrar. De otro lado se hallan los juicios, en que la mente analiza un concepto, separando del otro concepto que lo integraba. El juicio según el cual todos los solteros son no-casados, es un ejemplo del juicio analítico, por tanto el concepto de no-casado es parte intrínseca del concepto de ser soltero. Siguiendo las ideas fundamentales de Kant, podemos en primera aproximación, decir, que la distinción de ellos es ésta: "*un juicio es analítico sí y sólo sí, únicamente la reflexión en torno a los conceptos del juicio y en torno de la forma de combinarlos se hiciese necesaria para capacitarnos, para saber si el juicio es verdadero*". "*Un juicio es sintético, sí y sólo sí, la simple reflexión en torno de los conceptos y de su forma de combinación fuere insuficiente para determinar la verdad*". Pues, para saber la verdad es necesario apelar, a algo más.

Son muchos los filósofos contemporáneos que se interesan por los estudios de Kant, a propósito de "juicios" y de "conceptos", considerados como fenómenos mentales. Es posible todavía reformular esta primera distinción entre lo analítico y lo sintético para dejarla adaptable a los filósofos. Diremos que "*un enunciado es analítico, sí y sólo sí, tan solo su comprensión fuere requerida para habilitarnos y darlo como verdadero*". "*Un enunciado es sintético si al comprenderlo, nunca fuere suficiente para capacitarlo a determinar su verdad*" Hablar a cerca de enunciados, y no, de juicios y conceptos evita controversias innecesarias a respecto de la sicología kantiana. Para Kant, era en la Matemática que se encontraban los más claros ejemplos de tal conocimiento sintético "a priori".

LA TEXTURA ABIERTA DEL LENGUAJE

Hablamos de la distinción entre conocimiento “a priori” y empírico y de la distinción entre conocimiento analítico y sintético, tratando esas distinciones como si fueran nítidas y precisas. Es necesario reconocer sin embargo, que no se trata de distinciones perfectamente claras, no obstante la importancia filosófica de que revisten. Hay casos límite o periféricos que no se manifiestan en la categoría “a priori”, ni en la categoría empírica, hay también casos “límite”, que no se sitúan en la categoría analítica, ni en la sintética. En verdad, los casos más interesantes son frecuentemente, los que se hallan en la frontera o próximos a ella.

Para explicarnos mejor, utilizaremos, la riqueza de la “textura abierta del lenguaje” como un ejemplo simple aunque no sea matemático. Es el de alguien, que sepa que la pulga tiene seis patas. ¿Ese conocimiento será empírico y basado necesariamente en la experiencia, o “a prior”, no necesitando de la justificación que provenga de las pulgas? (En otras palabras, será analítico o sintético?) ¿Antes de que estemos autorizados a decir algo de tales pulgas? Bien dirán los impacientes: “*Depende de la manera cómo se emplea la palabra pulga*. Si tener seis patas, fuera parte de su definición para la pulga. *Será “a priori” y analítico, que las pulgas tengan seis patas*. Si no fuera. *Será* “*empírico y sintético*” De cierto modo la respuesta es buena. Es preciso distinguir la sentencia (secuencia de palabras). “*Las pulgas tienen seis patas*”, de los diferentes o varios pronunciamientos que alguien podría estar haciendo al formular, la sentencia. P. Ej. *Las pulgas tienen tres pares de patas*. Quien emplease, la misma sentencia y estuviese utilizando la palabra pulga, de tal modo que tener seis patas o tres pares de patas fuese parte de la definición, estaría haciendo un pronunciamiento analítico, “a priori”. Quien emplea esa misma sentencia y estuviese utilizando el vocablo, pulga, de tal modo que tener tres pares de patas no fuese parte de la definición, estaría haciendo un pronunciamiento empírico y sintético.

Sin embargo el asunto no se resume ahí. ¿Qué podemos decir de los que enuncian la sentencia sin definir antes el vocablo empleado, aquellos que al final emplean la palabra de una manera cualquiera? ¿Habrían hecho un pronunciamiento “a priori” y analítico o un pronunciamiento 'a priori" y analítico o un pronunciamiento empírico o sintético? Supongamos que un investigador retorna del Altiplano, trayendo especímenes desconocidos parecidos a las pulgas, con los hábitos de las pulgas, más con apenas cuatro patas. Valiéndonos de la pulga de manera ordinaria. ¿Cómo describir, lo hallado? Deberíamos decir: "Aquí está sorprendentemente una pulga de cuatro patas" o deberíamos decir "*He aquí una criatura muy parecida con la pulga más que no es pulga porque tienen cuatro patas*"? La cuestión no admite respuesta definida, pues, el uso común de la palabra pulga es insuficiente para poder dictar reglas precisas. El lenguaje común no establece de modo satisfactorio, hablar de pulgas con cuatro patas. En lo máximo, en el uso común de la palabra podría surgir cierta preferencia por la primera forma de describir lo hallado, sin - no en tanto – eliminar, la otra forma igualmente justificada por la experiencia anterior. Aquí está pues, un *caso límite*, un ejemplo de caso, en que el conocimiento queda en la frontera, entre lo *analítico* y lo *sintético*, no se encuadra en una forma definida dentro de nuestras categorías. En este sentido el empleo ordinario del término pulga, presenta, lo que los filósofos de la actualidad llaman "textura abierta", ejemplos como el anterior sobran y son de uso tan corriente que no nos damos cuenta, o no, nos ponemos a meditar sobre el valor conceptual de los vocablos. Nuestras tendencias en el uso de la palabra determinan un padrón más o menos flexible o indefinido, que no fija, en definitivo, todas las posibilidades.

En Matemática tenemos vocablos o términos que análogamente nos colocan en situaciones de un caso límite, por ejemplo: Forma y Número.

Sólo para cuestionamos un poco y para demostrar la importancia que tiene conocer la "textura abierta del lenguaje" en el uso que hacemos de

los vocablos citados (Ustedes darán las respuestas): ¿Cuáles son las definiciones que tenemos de los vocablos "Forma" y "Número?
¿Tenemos, el conocimiento exacto de lo que significan?
¿Esas definiciones que poseemos o conocemos (si es que las poseemos o conocemos) tienen carácter "empírico" o 'a priori'?
¿Cuándo nos referimos al vocablo “forma”, esa referencia es la de una figura o la de un objeto?
¿En cualquiera de los casos, estamos haciendo la distinción correcta (Si, sabemos lo que es lo correcto claro está), entre el conocimiento "a priori o empírico?
Si decimos "a priori". ¿Tenemos la justificación respectiva? o si decimos empírico.
¿Tenemos la experiencia sensorial?
¿No será que nuestro conocimiento de "forma", es un caso limite?.
¿Y qué decir del vocablo numero"? ¿No es otro caso análogo?
¿Qué nos dirían Rosseau y Piaget? ¿Sería para ellos también un caso límite? Especialmente para Piaget.
¿En cuál de las etapas que él menciona estaría manifiesta la necesidad de saber o conocer el significado de los vocablos "Forma" y "Número"?

GEOMETRÍA EUCLIDIANA

EGIPCIOS Y GRIEGOS

Medir las tierras para fijar los límites de las propiedades era una tarea importante en las civilizaciones antiguas Especialmente en Egipto. Allí las inundaciones anuales que causaba el río Nilo, en las áreas fértiles, derrumbaba las marcas fijadas el año anterior, obligando a los propietarios de las tierras a rehacer los limites de sus parcelas de cultivo. En algunas ocasiones, la cuestión era rehacer los limites, en base, a informaciones parciales. Cuando se conocía la forma del terreno, por ejemplo se trataba de reconstruir los lados restantes, si uno de ellos se había preservado. En otras ocasiones, destruidos por completo los limites o fronteras, se trataba de rehacerlas de modo tal que se demarcaban las propiedades conservando las áreas relativas que poseían en el pasado. Los egipcios se convirtieron en hábiles delimitadores de tierras y deben haber descubierto y utilizado innumerables principios útiles relativos a las características de las líneas, ángulos y figuras como por ejemplo el de la suma de los ángulos de un triángulo es igual a dos ángulos rectos, y el del área del paralelogramo es igual al del rectángulo que tenga la misma base, y la misma altura.

Los antiguos egipcios deben haber obtenido esas informaciones por medio de la observación y de la experimentación esto significa, por medio del raciocinio inductivo. Seguramente midieron muchos triángulos y muchos ángulos rectos y notaron que casi siempre la suma de los tres ángulos de un triángulo era aproximadamente a dos ángulos rectos: notaron, inclusive, que en los casos de diferencia apreciable entre la suma de los tres ángulos de un triángulo y de dos rectos notaron, inclusive, que en los casos de diferencia apreciable entre la suma de los tres ángulos de un triángulo recto y de dos rectos había, en general alguna explicación para la discrepancia; los ángulos no habían sido correctamente medidos a los lados del triángulo, no eran rectilíneos. De manera análoga los egipcios deben haber medido las áreas de muchos paralelogramos y muchos rectángulos (posiblemente procurando ver la cantidad de los pequeños cuadrados contenidos en ellos), deben haber notado que las áreas de los paralelogramos eran casi siempre iguales o casi iguales a las áreas de los correspondientes rectángulos de la misma altura y del mismo largo. Deben también haber notado que las eventuales podían ser atribuidas a las impresiones de las medidas o al mal trazado de las líneas. Parece que los egipcios se limitaron a la acumulación de conocimientos que los habilitaban a resolver los problemas de trazado de límites de comparación de áreas, de proyectos arquitectónicos y de una ingeniería de construcciones.

Los Griegos percibieron lo que los egipcios eran capaces de hacer y asimilaron sus principios empíricos. Al conocimiento así delimitado, los griegos le dieron el nombre de Geometría con raíces semáticas griegas, es decir medida de la tierra. Y no tuvieron en cuenta que los egipcios sí tenían su concepto de geometría, justamente por sus trabajos descritos en el párrafo anterior. Y ese concepto era:

> "***Kha-i ta kheperu qed***"[4] *Cuya pronunciación de kha-i ta (probablemente de dos sílabas), es como el ach en alemán o como el "loch" en escocés igualmente para "khe"*
> "Medida terrestre de la forma"; "Midiendo el tamaño de la tierra"; "Midiendo granos"; "Medida de un camino".

Los griegos, sin embargo, al contrario de los egipcios, apreciaron la Geometría, no apenas en virtud de sus aplicaciones prácticas más en virtud de su interés teórico, deseando comprender la materia por ella misma y no en términos de su utilidad. A los griegos no les bastó el criterio empírico procuraron encontrar demostraciones deductivas rigurosas de las leyes del espacio que gobernaban las aplicaciones prácticas

[4] Este concepto lo hallamos después de una incansable y vana encuesta a notables egiptólogos, hasta que un día nos topamos con la página Web de Jim Loy y gracias a la ayuda de él pudimos rescatar esos vocablos, de escritura hierática. Realizamos la búsqueda guiados sobre todo por el concepto en Quechua "Pacha Tupuy" antes que por el concepto griego. Pues, decíamos si los incas lo tuvieron por qué no los egipcios?

de la Geometría. Durante muchos siglos los griegos se dedicaron a la Geometría, descubriendo y demostrando un número creciente de principios geométricos. Algunos filósofos griegos en particular Pitágoras y Platón, daban enorme importancia intelectual a la Geometría, considerando que en su forma pura y abstracta, ella se aproximaba bastante a la metafísica y a la religión. Fue aproximadamente 300 años antes de Cristo que Euclides escribió su libro clásico. "*Los Elementos*" en que reunió y presentó de modo sistemático los principales descubrimientos de sus precursores. Esta obra es uno de los clásicos que mayor influencia ejerció en el pensamiento occidental. En los tiempos antiguos, en la Edad Media, en el período moderno, hasta el siglo XIX, "*Los Elementos*" de Euclides, fueron no sólo apenas un libro o texto de Geometría, más el modo de aquello que el pensamiento científico debía ser.

EL PROCEDIMIENTO DE EUCLIDES.

¿Cuáles son los trazos característicos de las técnicas adoptadas por Euclides? En primer lugar, él siempre enuncia las leyes en forma universal. No examina las propiedades de una determinada línea o figura realmente existente; examina por el contrario las propiedades que todas las líneas o figuras de tal o cual especie deben tener. Y no sólo eso, formula las leyes de modo que las torna rigurosas y absolutas. Dice por ejemplo, que 1a suma de los ángulos de cualquier triángulo es siempre igual a dos ángulos rectos, no dice que se trata de un resultado aproximado. Lo que es más importante, Euclides no se limita a enunciar un gran número de leyes geométricas, las demuestra. Su libro en verdad consiste en demostraciones expuestas de manera sistemática. Las demostraciones no son de carácter inductivo.
Euclides, no nos pide jamás, que efectuemos medidas de los ángulos de triángulos reales, a fin de verificar que, la suma es igual a dos ángulos rectos. No se preocupa en ningún momento con experimentos u observaciones de ese género. En vez de eso, nos presenta demostraciones de

carácter deductivo, por medio de las cuales procura establecer sus conclusiones con el rigor de la absoluta necesidad lógica.
Sin embargo, ¿qué es lo que puede ser demostrado? A primera vista se podría creer que el tratado ideal de la Geometría sería aquel que el autor demostrase todas las leyes geométricas formuladas. Un poco de reflexión, sin embargo, revela que eso sería adoptar una posición excesivamente - optimista. Una demostración (por lo menos en el sentido común de la palabra) es una cadena de raciocinios que nos permite aseverar una conclusión mostrando que ella decorre lógicamente de ciertas premisas conocidamente verdaderas. No existe demostración a menos que se pueda partir de una o más premisas conocidas - la base sobre la cuál se asienta o funda la demostración. Sería difícil, por otro lado imaginar qué serias conclusiones geométricas pudiesen provenir de premisas que no incluyesen por lo menos algunas leyes relativas a *punto, línea, figura,* o algo parecido. Euclides admitía que las premisas geométricas eran indispensables para la obtención de conclusiones geométricas. Supuestamente aceptemos ese punto de vista de que, las conclusiones sólo pueden ser demostradas a partir de premisas donde haya por lo menos una de carácter geométrico. Significa eso. ¿La imposibilidad de demostrar todas las leyes geométricas, deduciendo otras y seguidamente otras, a partir de estas, repitiendo el proceso hasta por fin llegar a las leyes originales? Eso es viable sin duda. Cualquier ley geométrica puede ser derivada de otras leyes geométricas. ¿No habríamos de ese modo demostrando todas las leyes? La respuesta es NO, pues la supuesta demostración estaría basada en un raciocinio circular. (petitio princip) Un raciocinio circular no es una demostración porque no consigue establecer la verdad de sus conclusiones.

Se debe recordar que una deducción no equivale a una demostración. Deducir a una conclusión a partir de ciertas premisas equivale a ofrecer una demostración de la conclusión cuando ya estuviese asegurada la verdad de las premisas (Puedo deducir, sin dificultad "Todos los delfines vuelan”, empleando la premisa "Todos los mamíferos vuelan y los delfines son mamíferos": no consigo sin embargo demostrar con ello que los delfines vuelan). Por lo tanto parece que algunas leyes geométricas pueden ser demostradas y otras no. En otras palabras las leyes de la Geometría pueden ser distribuidas en 2 grupos; de un lado quedarán algunas leyes que no recibirán demostraciones, mas que quedarán como premisas básicas y, de otro lado quedará un gran número de nuevas leyes, cada una de las cuales se espera poder demostrar con auxilio de las premisas básicas. En "*Los Elementos*", Euclides llama "*postulados*" a las leyes del primer grupo; se trata de leyes a propósito de rectas, ángulos y figuras consideradas verdaderas, más que el geómetra no procura demostrar utilizándolas para la demostración de otras leyes geométricas. Las leyes demostrables son llamadas "*teoremas*" (o según la terminología antigua, "*proposiciones*")

LOS POSTULADOS DE EUCLIDES.

1. *Una línea recta puede ser trazada de uno a otro punto cualquiera.*

2. *Cualquier segmento finito de recta puede ser prolongado definidamente para construir una recta.*

3. *Dados un punto cualquiera y una distancia cualquiera, se puede trazar hin círculo cuyo centro sea aquel punto y el radio igual a la distancia dada.*

4. *Todos los ángulos rectos son iguales entre si*

5. *Si una recta corta otras dos rectas de modo que la suma de dos ángulos interiores de un mismo lado, sea menor que dos ángulos rectos, entonces las dos rectas se cruzan al ser prolongadas suficientemente del lado de la primera recta donde se hallan los dos ángulos.*

Meditando a cerca del significado de esos postulados, vemos de inmediato que las ideas de Euclides, difieren mucho dé las concesiones inductivas y empíricas adoptadas por los egipcios. Los tres primeros postulados de Euclides revelan que él no está de manera directa discutiendo, ningún problema concreto de mensuración de tierras, en efecto, en condiciones reales no siempre es posible trazar una recta que pase por dos puntos dados. Varios obstáculos habría que vencer (montañas, lagos, partes de un país extranjero) para realizar el trazado de una recta. También no es verdad, que en condiciones reales sea indefinidamente prolongable. Es obvio por ejemplo, que un segmento vertical sólo puede ser prolongado un poco para arriba y para abajo, lo mismo que un segmento horizontal puede ser prolongado hasta la primera barrera impenetrable. No se puede igualmente diseñar un circulo cuyo centro haya sido arbitrariamente seleccionado y cuyo radio sea apreciablemente grande; los obstáculos impedirían ese trazado. Euclides sabia todo eso, es claro, mas, las condiciones prácticas simplemente no le interesaban. Concebía que, en principio, una recta podría ser trazada de un modo que se ligasen dos puntos cualesquiera, fuese o no posible trazarlas en realidad. Es decir Euclides concebía un espacio en el que inexistían obstáculos absolutos y en derredor del cual inexistían fronteras exteriores absolutas.

El cuarto postulado de Euclides es, a primera vista un poco sorprendente y parece que se podría dispensarlo, por ser tan trivialmente verdadero aquello que asevera. Si dos ángulos son rectos, parece obvio que sean iguales. ¿Por qué, postularlo?

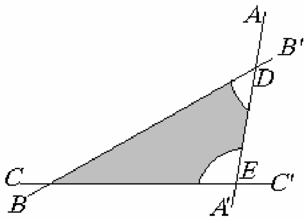


fig. 1

El quinto postulado encierra una ley más complicada que las fijadas en los postulados precedentes. Su significado puede ser comprendido a través de una figura. (fig.1)

Supongamos que tenemos tres rectas AA', BB' y CC'. El postulado dice que si AA' cortase BB' y CC' de modo que los ángulos CEA y BDA', sumados, den un ángulo menor que dos ángulos rectos, entonces BB' y CC' han de cortarse al ser suficientemente prolongadas.

LOS AXIOMAS Y LAS DEFINICIONES DE EUCLIDES

Además de emplear los postulados, Euclides emplea también, cinco otros principios iniciales llamados axiomas (o "nociones comunes") La diferencia fundamental entre postulados y axiomas es la siguiente; aquellos tratan específicamente de cuestiones geométricas, al paso que los axiomas no tratan de nada que pudiese decir específicamente de la Geometría, asumiendo un carácter mucho más general. Los axiomas tratan de la comparación de magnitudes, noción que es útil para otras materias y no sólo para la geometría. Estos son los axiomas de Euclides:

1. *Dos cosas iguales a una tercera, son iguales entre si.*

2. *Si partes iguales fueran adicionadas a cantidades iguales, los resultados continuarán siendo iguales.*

3. *Si cantidades iguales fueran sustraídas de las mismas cantidades los restos serán iguales.*

4. *Cosas que coinciden una con la otra son iguales.*

5. *El todo es mayor que las partes*

Los principios fijados en los postulados y en los axiomas, son de tal modo evidentes, que pueden presumirse que ninguna persona llegaría a dudar de ellas. Siendo así no hay mal en dejarlos sin demostración, permitiendo a pesar de ello que figuren como base en la que podrán ser asentadas las demostraciones de leyes mucho más obvias. Para los griegos, probablemente la diferencia entre acción y postulados, bajo el prisma de la credibilidad que merecen estaría en esto: Sí una persona dudase de los postulados de la Geometría, seria de hecho cometer un error, tornándose incapaz para el estudio de la materia, esto no implicaría, que sea incapaz para otros tipos de estudios (aritmética, biología, música); sí además dudase de los axiomas, estaría evidenciando incapacidad para cualquier tarea intelectual, ya que la noción de magnitud es indispensable en casi todas las disciplinas.

Euclides desea asegurar que cada uno de sus temas geométricos están demostrando de modo lógicamente conclusivo. El ansia que tiene por el rigor, no en tanto tiene una faceta más. Desea igualmente sistematizar los términos que se presentan en las leyes geométricas para darles un significado bien delimitado. En el método empleado por Euclides es esencial que los términos sean definidos antes de ser utilizados, pues de esa manera se gana en claridad y se garantizan que el significado de cada palabra esté adecuadamente fijada. El propósito, además de ello, es contar con un medio para evitar las falacias lógicas en las demostraciones. De hecho, permitir que términos nuevos sean introducidos en los teoremas si no se toman en cuenta ese propósito, es permitir que nuevas premisas no enunciadas, se inmiscuyan en el raciocinio.

He aquí algunas de las definiciones que son presentadas al inicio del libro Primero de los Elementos

1. *Un punto es aquello que no tiene partes.*
2. *Una línea tiene longitud, pero no anchura.*
3. *Una línea recta es línea trazada uniformemente con puntos entre sí.*
4. *Una superficie es aquello que sólo tiene largo y ancho.*
5. *Una superficie plana es una superficie trazada uniformemente con sus rectas entre sí.*

6. *Un ángulo plano es la inclinación de relación de una con otra de dos rectas de un plano que se cruzan entre sí y no están en la misma recta.*

7. *Cuando una recta es colocada sobre otra de manera que los ángulos adyacentes sean iguales cada uno de los ángulos es llamado recto. y esta recta superpuesta se dice perpendicular a la primera.*

8. *Una figura es todo aquello que queda delimitado por cualquier frontera o fronteras.*

9. *Un círculo es una figura plana cerrada por una línea, tal que, todos los segmentos que estén sobre ella y que pasen por un punto determinado del interior de la figura sean iguales entre sí.*

10. *Rectas paralelas son líneas rectas que, estando en el mismo plano y prolongadas indefinidamente en los dos sentidos se cruzan.*

LOS TEOREMAS DE EUCLIDES.

Postulados axiomas y definiciones constituyen los puntos de partida para las demostraciones de Euclides. Su objetivo es demostrar todos los otros principios geométricos - primero los de la Geometría Plana, después los de la Geometría Espacial - revelando que son resultantes necesarias de los principios fundamentales. Son de dos especies, las aserciones demostradas en "*Los Elementos*". Algunas toman la forma de leyes universales, así la Proposición 4 de Libro Primero dice: "*Si dos Triángulos fueren tales que dos lados del primero son iguales a dos del segundo y los ángulos determinados por esos lados iguales, son también iguales, entonces sus bases serán iguales, el primer triángulo será igual al segundo y los demás ángulos del primer triángulo serán a los del segundo, es decir los ángulos determinados por los lados iguales*" La Proposición 47, del mismo Libro reza: "*En los triángulos rectángu-*

los, el cuadrado construido sobre el lado que se opone al ángulo recto es igual a los cuadrados construidos sobre los dos lados que delimita, el ángulo recto". Otras aserciones demostradas no toman la forma de leyes universales, explican en vez de eso, tareas para ser ejecutadas, es decir que indican una rutina a seguir para completar la tarea dada. La rutina es presentada de manera que al seguirla es posible demostrar ejecutando la tarea indicada.

Para tener una idea del método empleado por Euclides, examinemos el tratamiento que él da a la Proposición del Libro Primero.

Construir un triángulo equilátero, dado uno de sus lados

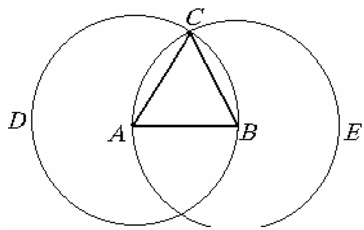


fig. 2

Sea el segmento AB. Se pide un triángulo equilátero construido sobre AB. Trácese una circunferencia de centro A y distancia (radio) AB. Sea BCD, esa circunferencia (Postulado 3). Repítase el proceso tomando como centro B y la distancia BA; se obtiene la circunferencia ACE (Postulado 3). sean trazadas, las rectas CA y CB, uniendo el punto C, en el que las circunferencias se cortan en los puntos A y B (Postulado 1). Ahora, siendo A, el centro de la circunferencia CDB. Se observa que AC es igual a AB (por la definición 5) de modo análogo, siendo B el centro de CAE, BC es igual a BA (Una vez más en virtud de la definición 5). Mas, ya se demostró que CA es igual a AB, luego los segmentos CA y CB son también iguales a AB. Pero, (axioma 1) CA es igual a CB. En consecuencia, Las líneas rectilíneas ***CA***. ***AB*** y ***BC*** son iguales entre sí, esto implica que el triángulo ABC es equilátero, y. fue construido sobre un segmento AB.

MANERA MODERNA DE ENCARAR LOS SISTEMAS DEDUCTIVOS.

Pensemos un poco. a cerca de la manera adoptada por Euclides para organizar su sistema. Aunque Euclides reconociese la necesidad de postulados no demostrados, parece que no reconoce la necesidad de los términos no definidos. *Los Elementos* no contienen lista de términos no definidos; al contrario, Euclides procura definir todos los términos de que se vale. Un poco de reflexión muestra sin embargo que es impracticable definir el sistema. Cada uno de los términos empleados en ese sistema - como era impracticable demostrar todos los teoremas del sistema habría sido muy agradable encontrar separados de modo explícito el sistema euclidiano, los términos definidos (con auxilio de otros términos) y los no definidos hoy en día denominados primitivos.
Desde un punto de vista más moderno se puede decir que hay dos decisiones a tomar (y tomar de modo bien claro), cuando se delinea un sistema como el de la Geometría, debemos examinar, toda la lista de términos (o conceptos, como algunos autores prefieren decir) que van a ser utilizados, separando aquellos que serán los primitivos en el particular sistema que se pretende elegir. La decisión es orientada por la esperanza de que todos y casi todos los demás términos pueden ser definidos a costa de los primitivos.
La segunda fundamental decisión a tomar es la referente a la selección de axiomas y postulados. La distinción de Euclides, separando axiomas y postulados, no es adoptada por los escritores modernos que emplean en la mayoría de las veces los vocablos "axiomas' y "postulados' como sinónimos. Al tomar esta segunda decisión, pensamos en la totalidad de las leyes que pueden ser expresadas con auxilio de los términos primitivos y definidos, seleccionando alguna de ellas para que figuren como presuposiciones no demostradas, utilizados para las demostraciones de los teoremas. Esas presuposiciones no demostradas son llamadas axiomas (o alternativamente postulados).

¿Cuál es el margen de libertad permisible para poder escoger los términos primitivos de las definiciones de los axiomas del sistema? Estudiosos modernos admiten que la libertad de selección se toma más amplia cada día, pues, existen varias opciones cuando se desea seleccionar términos primitivos y axiomas y, es posible definir de varios modos obteniendo de así, formulaciones diversas, más igualmente legitimas de un asunto particular. Por ejemplo en el trato que el matemático alemán Hilbert dio a la Geometría euclidiana, hay seis términos primitivos, a saber "punto", "recta", "plano", "incidencia", "entre" y "congruente". En una axiomatización bien diferente, formulada años después por Oswald Vablen los términos de primitivos son apenas "punto", "entre" y "congruente" y los axiomas son muchos más diversos de aquellos que Hilbert había escogido. Diferente de ambas es la axiomatización hecha por E.V. Huntington que tomó como primitivos los términos "esfera" e "incluye", tomando como es natural muy diversos sus axiomas de aquellos que eran utilizados en los sistemas anteriores. No obstante las diferencias, todas las axiomatizaciones son formuladas sobre el mismo asunto: demostrar, los teoremas de Euclides. Desde un punto de vista moderno, todas las axiomatizaciones son perfectamente legítimas, variando apenas en la elegancia de la presentación, cada vez más económica, valiéndose de un número menor de términos primitivos y de axiomas.

LA GEOMETRÍA COMO CONOCIMIENTO A PRIORI

El sistema geométrico de Euclides fue una importante conquista intelectual, sin embargo propuso serias cuestiones para los filósofos. Parece que los teoremas de Euclides con respecto de puntos líneas y figuras, deben ser encarados como simples consecuencias lógicas de los postulados que él escogió.
¿Cuál es sin embargo el status de tales postulados?
¿Son verdades que podemos admitir como tales?
¿Tratándose de verdades, son verdades empíricas o "a priori'?

¿Que tipo de conocimiento reflejan y cómo sabemos su verdad?
Euclides naturalmente escribió de cerca de la Geometría y no a cerca de cuestiones filosóficas pertinentes al significado de la Geometría. Más los filósofos, tanto los antiguos como, los modernos se preocuparon con cuestiones de ese género y es interesante notar que hasta el siglo XIX había entre ellos un considerable acuerdo en lo tocante a ciertos puntos fundamentales. Hasta ese entonces, los pensadores encaraban la Geometría como ciencia; una ciencia de los puntos, las líneas y las figuras. Decir alguna cosa a propósito de los puntos líneas o figuras es decir la verdad o una falsedad, no existiendo una tercera alternativa. Los pensadores admitían aún más y sin margen de duda, que pronunciaba una verdad quien afirmase los postulados y teoremas, incurriendo en falsedad aquel que los negase; Los postulados y teoremas de Euclides, según pensaban, eran genuinos principios' de la ciencia de la Geometría, principios que describían de manera correcta los puntos, las líneas y las figuras. Por ello era aceptada como un cuerpo de conocimiento científicos a cerca del espacio - un conocimiento perfectamente real y bien asentado. Para la mayoría de los pensadores, aun más, el conocimiento geométrico era de carácter “a priori” y no empírico. Según se podía decir quien afirmase los postulados y teoremas de Euclides, estaría presentando enunciados necesariamente verdaderos, sin precisar de apoyo de las evidencias sensoriales, al paso de aquellos que negasen los postulados y teoremas estarían presentando enunciados necesariamente falsos, cuya refutación no precisaría apoyarse en experiencias sensoriales.

LA GEOMETRÍA COMO CONOCIMIENTO SINTETICO.

Hay otro punto relevante en la cuestión de status de los postulados y teoremas de Euclides, que habría sido aceptado por la mayoría de los pensadores, por lo menos hasta el siglo XIX. Ellos dirían que los postulados Euclidianos, así como gran parte de los importantes teoremas, que de tales, postulados serian deductibles, constituyen verdades "a priori" dotadas del tipo de contenido que en la jerga filosófica, las tornaría principios sintéticos y no, analíticos. Encarando a semejanza de Kant, las verdades lógicas como ejemplos típicos de verdades analíticas, el punto en cuestión relativo a la Geometría, podría ser focalizado diciéndose que hay una notable diferencia entre las verdades sintéticas, no triviales de la Geometría y las verdades analíticas triviales de la Lógica.

Sea como fuere, Kant - el pensador que explícitamente defendió la doctrina de carácter sintético de la Geometría - ni siquiera procura demostrar su tesis de un modo formal. Nos induce a que meditemos acerca del significado de nuestras leyes geométricas fundamentales. Le parece evidente que tales leyes no sean simples verdades verbales y que no se pueda mostrar que son equivalentes a verdades lógicas vacías. Lo que el filósofo sustentaría es la inexistencia de definiciones de los términos primitivos de la Geometría que permitiesen transformar los postulados en anunciados verdaderos por estricta fuerza de sus formas lógicas.

Esta claro que algunos enunciados a respecto de los puntos, líneas y figuras son analíticos. Hasta Kant sería forzado a admitirlo. Así por ejemplo: es analítico en el sistema geométrico de Euclides, que los círculos son figuras, ya que eso decorre de la definición que el geómetra ofrece "círculo" Kant, sin embargo sustentaría que las leyes fundamentales de la Geometría tienen carácter sintético.

Siendo de naturaleza sintética los postulados geométricos y la mayoría de los teoremas fundamentales, se presentaría la cuestión de saber, cómo la mente humana se torna capaz de poseer conocimientos de la geometría. El conocimiento sintético depende de algo que está por encima y más allá de una simple comprensión de significados de los términos. Los filósofos (antes del siglo XIX) estaban de acuerdo en cuanto a rechazar la experiencia sensorial como base para ese tipo de conocimiento. Parecería por tanto, que algo extraño - singular visión mental - estaría en la base de nuestro conocimiento de la Geometría, si el conocimiento debía ser sintético y "a priori'.

¿POR QUÉ NO, LOS TIWANAKOTAS O, LOS INCAS?

Hasta aquí hemos estado inmersos (por no decir obcecados), en todo lo que a los griegos concierne y especialmente a Euclides. Es irresistible la tentación de no querer pensar y manifestarnos sobre nuestros propios antepasados, los tiwanakotas, incas o los anteriores a ellos y como es natural con ese pensamiento surge la pregunta. ¿Será que entre ellos no hubo también un "Euclides"? ¿O cómo, explicar todos los trazos geométricos que se encuentran en las ruinas? Quizá alguien dirá ¿por qué pensar que hubo un "Euclides" o cualquier otro geómetra que hubiera orientado las formas y figuras que están impresas en las ruinas de Tiwanaku?[5] La historia nos dice: que el gran imperio de los Incas se llamaba el "Tahuantinsuyo" (Las cuatro regiones) ¿El vocablo región no encierra un conocimiento empírico de un área de terreno con sus respectivos límites? ¿No estaría este vocablo comprendido en la definición 5 del Libro Primero de "*Los Elementos*"?

Cuando nos hacemos la pregunta: ¿Por qué no, los Tiwanakotas o los Incas? Nuestra imaginación busca la respuesta en las ruinas que aún quedan, ya sea en Tiwanaku, Machu Picchu, Samaipata o cualquier otro lugar donde la cultura tiwanacota o incásica estuvo asentada y realizó esas magníficas construcciones como las de Tiwanaku, en las que entre piedra y piedra (por ejemplo) no entra la hoja de una navaja, al igual que en las pirámides de Egipto, y no sólo eso, la equivalencia de poliedros al colocar dos o tres piedras pequeñas (fig. 3), para equiparar el tamaño y volumen de una grande guardando así una linearidad para seguir colocando unas piedras sobre otras, mas también las

fig. 3

[5] Explicación es ampliada en "El Teorema Matemático de la Puerta del Sol"

simetrías de los dibujos en los diferentes monolitos y monumentos llenos de símbolos que guardan mensajes esperando ser decodificados. Esas muestras no son abstracciones mentales, están ahí y no, nos cabe duda de que fueron creadas por personas que sabían lo que hacían y, al igual que los griegos y egipcios tuvieron que haberse formulado cuestiones de comparación de medidas, áreas y/o volúmenes, así como las cuestiones de metafísica. Inclusive, tuvieron un nombre sinónimo de geometría, como "pacha tupuy"[6], pero por razones que no conocemos los "yatichiris"[7] o los encargados de la enseñanza que dedicaban su tiempo en las "yachay wasi"[8] no, nos legaron esos conocimientos, o vaya uno a saber si lo hicieron, los conquistadores (léase depredadores de la cultura), en su afán insaciable de fácil riqueza material no les importó la cultura y causaron la destrucción de esa riqueza cultural que no tiene el brillo metálico del oro, pero sí, el brillo de la luz de la sabiduría.

Una especial razón para hacernos las anteriores cuestiones está basada en las analogías que se han dado tanto en la cultura griega como en la incaica. Por ejemplo entre los griegos existían los "rapsodas" que acompañados de un instrumento musical relataban las acciones de sus héroes, o acontecimientos relevantes de la vida griega. Análogamente los "yarawikus" del imperio incaico hacían el mismo papel. Veamos otra analogía quizá más convincente. Las "ñustas" del imperio incaico hacían el mismo papel que las "vestales" de Roma o sacerdotisas griegas. Las "ñustas" eran seleccionadas y cuidadas de la misma manera que las "vestales" y/o sacerdotisas, recibían la respectiva Educación para el papel que les tocaba realizar en las grandes ceremonias. ¿Cómo explicar tal analogía o semejanza, o será que en esa época ya existía la comunicación vía satélite o Internet? Nuestros ejemplos, no, nos muestran nada referente a la geometría, pero es una forma de ingresar en ese campo e investigar y quizá, si nos preocupamos buscando la

[6] Vocablo tomado del "Glosario Quichua de Matemática" de Oscar Pacheco Ríos

[7] Voz Aimara y Quichua Enseñantes (Profesores)

[8] Voz Quichua. Casa de Enseñanza.

información debida con los respectivos estudiosos hallaremos las respuestas a estas y otras interrogantes que surgen y surgirán siempre que hagamos un poco de filosofía.

En ese intento por conocer el pensamiento filosófico trasuntado en los vestigios y testimonios que nos legaron los tiwanakotas e incas, nos sumergimos en un viaje al pasado para incursionar en un campo casi desconocido y, no nos imaginamos que en esta empresa, cada vez haríamos un recorrido retrospectivo, más y más apasionante hacia lugares de la Historia preincaica y prehispánica (literalmente hablando), visitando esas culturas antiguas que habían alcanzado un alto grado de desarrollo matemático, pues, así, demuestran las propias ruinas de Tiwanaku en las que, pese al tiempo transcurrido, nos admiran sus colosales trabajos de arquitectura e ingeniería, o las de Machu Picchu, en cuyo lugar sus habitantes hicieron una labor de alta escuela, construyendo templos, palacios, terrazas o andenes con una perfecta distribución de canales de riego, distribución que, sólo con la Teoría de redes de Könisberg, se podría resolver en su estructuración matemática. Como si nuestro deseo por conocer esa riqueza oculta y guardada en esas estructuras pétreas (que el salvaje avasallador y expoliador hispano, no pudo destruir), lo hubiéramos enviado hasta la "Pachama" o "Viracocha", se nos aparece, un joven y novel investigador, Javier Amaru Ruiz García, que intenta encontrar códices iconográficos interpretadores de los misteriosos valores matemáticos, reflejo del filosofar ancestral, en su trabajo ***"Teoría de la Unificación en 10 Dimensiones***", como queriendo responder parte de nuestras cuestiones. Por que él dirige su atención a las ruinas tiwanakotas y en el capítulo 2 del citado libro, bajo el título de "*LAS SAGRADAS MATEMÁTICAS DE TIWANAKU*". Nos describe (entre otras interpretaciones): El "Lenguaje de la Supersimetría; "El Teorema Matemático de la "Puerta del sol"; "El cuadrado Mágico de Tiwanaku".

EL LENGUAJE DE LA SUPERSIMETRÍA[9]

A decir de Amaru Ruiz: "*La Estructura Matemática Tiwanacota fue hallada gracias al minucioso estudio de los símbolos numerales tiwanakotas y traducida al Lenguaje Lógico Tiwanacota LLT. Cabe mencionar que, al haber sido esta simbología objeto de innumerables estudios, nosotros hemos rescatado sus partes más importantes; con todo ese caudal bibliográfico podemos sin lugar a dudas afirmar que la lógica y matemática tiwanakotas presentadas en este libro son auténticas*"

EL TEOREMA MATEMÁTICO DE LA PUERTA DEL SOL

Fig. 4

Para presentar el teorema, el autor, fija su atención en el personaje central de la "Puerta del Sol" y de modo especial efectúa una explicación detallada y descriptiva del mismo (fig.4), a la que él llama "*el planteamiento del teorema de la perfección*", nos dice: "*Realizando un análisis lógico a los símbolos e ideogramas grabados en La Puerta del Sol y concentrándonos en el detalle de la aureola que rodea la cabeza del personaje central, notamos que su planteamiento es sumamente interesante, porque demuestra ser un teorema lógico matemático, en el cual los números y figuras geométricas aparecen virtualmente de manera subliminal, ya que la aureola está rodeada de 18 pares de ganchos (triángulos) rotando en dos direcciones opuestas (18 hacia la derecha y 18 a la izquierda) y ambos convergiendo hacia el*

[9] Todos los textos tomados en su integridad los hemos transcrito en cursiva.

centro del cuadro, el cual mantiene una constante numeral de 36 (18+18)".

He aquí una aclaración de la explicación anterior. El gráfico de la figura 5, nos aclara con más detalle que quiere decir ganchos (triángulos) Al trazar una diagonal en la figura, descubrimos los triángulos simétricamente sobrepuestos e indicando su respectiva dirección. Como se verá más adelante, si tomamos como indicador direccional el ángulo recto, tenemos 1os 18 triángulos con dirección a la izquierda y los otros 18 con dirección a la derecha, que completan el borde de la aureola. Estos valores están anotados debajo de cada hemisferio (HI y HD) y la suma total de los triángulos en ambas direcciones es 36.

Fig 5

DE LA UNIFICACIÓN A LA PERFECCIÓN

Teóricamente propone: *El planteamiento del teorema es el siguiente:*

Encontrar la figura geométrica de unificación con una constante de valor 36 y que al ser dividida en dos partes iguales cada una deberá tener valor 18. Asimismo, partiendo de la cruz del Sur y su diagonal desde el centro a la periferia, se repiten las figuras geométricas originales, cuyos elementos sumados entre sí dan como resultado nuevamente el valor total. Una vez encontrada la figura geométrica de unificación, el valor de su área se multiplica por el total de elementos numéricos, para de esa manera llegar a la perfección.(Fig. 6)

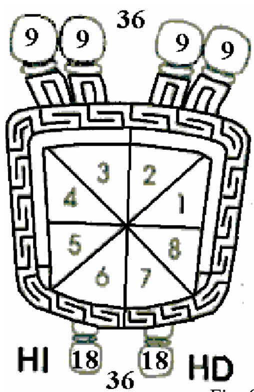


Fig. 6

LA RESOLUCIÓN DEL TEOREMA

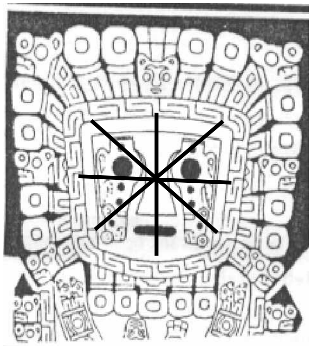


Fig 7

Aunque, Javier Amaru Ruiz no lo indica en su trabajo, nosotros mediante otras investigaciones, descubrimos que para intentar resolver el teorema, imagina el rostro sin sus diseños, cual si éste estuviera vacío, pero, en ese espacio traza líneas diagonales partiendo de la cabeza de un puma a la otra y medianas de igual modo desde un figura central de uno de los lados a la otra opuesta y lo toma como una figura cuadrada (Fig. 7) y, por ello nos dice: *"La figura geométrica de la unificación es el cuadrado, Cuya división geométrica da paso a la creación del rectángulo, el triángulo y Circulo. Para tener una constante de 36, sus lados son de valor 6. área es igual a 6x6=36.*
Este valor 36 también se lo encuentra en la suma de los ocho elementos numéricos dentro del cuadrado. 1+2+3+4+5+6+7+8=36". (fig. 3)
A continuación realiza divisiones tal como nos explica:
Cuando un cuadrado de área 36 se lo divide por la mitad, sus partes convierten en dos rectángulos de valor área 18. Asimismo el valor dos veces 18 se lo encuentra sumando el Hemisferio Izquierdo 1+2+8+7=18 y el hemisferio Derecho 3+4+5+6=18.(Fig. 8)

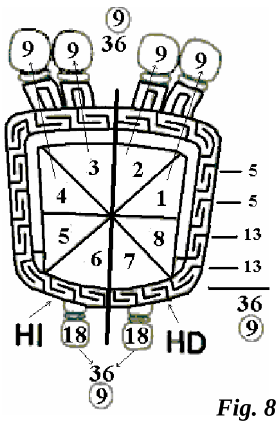


Fig. 8
La resolución del teorema

La cruz divide al cuadrado en cuatro partes y luego con sus dos diagonales forma ocho triángulos de 45 grados.
Las figuras geométricas originales son los triángulos que, distribuidos en forma irradiada desde el centro a la periferia, suman 8. Todos los triángulos de 45 grados. Ya, vimos que los ocho números sumados entre sí dan un total de 36. También 45x8 es igual a 360. Hacemos no-

tar al autor que al sumar las cifras significativas de 360º que es la medida de la circunferencia*; 3+6+0 = 9*. Siendo *9,* un número digital.

Al resolver de esta manera, descubre que la figura contiene 10 numerales, a los que él llama números, 8 números *reales* que están en los ocho triángulos y dos *virtuales*: Uno es el "9" que resulta de sumar verticalmente 1+8 = 9; 2+7 = 9; 3+6 = 9 y 4+5 = 9. El otro es el "0" que en realidad está implícito antes de realizar la división del cuadrado, También lo encontramos al 9 y el 0, implícitamente en el producto de los 8 ángulos de 45° que convergen en el centro. Así: 8 x 45º = 360° ρ

Amaru Ruiz tiene su propia explicación para lo que acabamos de interpretar: "*Los diez elementos encontrados son los 10 super-números o dimensiones del 0 al 9 que se encuentran dentro del cuadrado, y 36 x10 es igual a 360 (el círculo perfecto) dividido en ocho triángulos de 45 grados.*"

"*Por lo tanto, hemos llegado desde la unificación a la perfección, geométricamente desde un cuadrado a un círculo y matemáticamente resolvimos la unidad numérica.*"

CUADRADO MÁGICO DE TIWANAKU

Enseguida nos indica cual fue la lógica que utilizó para encontrar el "cuadrado mágico"

" *De acuerdo a la lógica Tetraléctica, el simbolismo tiwanakota es similar a un conjunto de cajas vacías, toda vez que se llenan estas cajas lógicas, (en este caso las hemos llenado con números) los resultados empiezan a emerger, y una vez llenada una caja, automáticamente se empiezan a llenar las otras.*

Con esta lógica en la mente nos dimos a la tarea (por un lapso de 5 meses) de resolver el teorema. Comenzamos llenando las cajas, primero con cuatro cuadros (en cruz), luego en ocho triángulos (otra cruz diagonal); después numeramos los triángulos con los ocho números básicos. Completada esa tarea, pudimos verificar los resultados y evi-

dentemente el teorema de la aureola se había resuelto. Esa solución dio paso al nacimiento del "Cuadrado Mágico Tiwanaku".
Habiendo obtenido el cuadrado mágico y utilizando el poder de simetría del mismo, pasa a demostrar, cómo es posible encontrar, el valor de "Pi" (π) En nuestro caso llegaría a tener el nombre de "pi matemático andino", de ese modo diferenciarlo del "pi" griego.
Para este propósito realiza una división de la figura con un trazo diagonal tal como lo indican las Figs. 9 y 10. Realiza la sumatoria de los valores que quedan debajo de la diagonal y luego las divide por la sumatoria de los valores que están sobre la diagonal. Así en la Fig. 4 resulta:

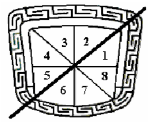


Fig 9

Fig. 10

(1+8+7+6)/(2+3+4+5) = 22/14 y la Fig. 5:
(4+5+6+7)/(3+2+1+8) = 22/14. En ambas divisiones el resultado es 1.571428. Pero cada uno de estos resultados equivale sólo al medio "Pi" ($\pi/2$), por consiguiente se hace necesario sumar ambos cocientes: 1.571428 + 1.571428 = 3.142856. Este resultado es una aproximación idéntica a la que los griegos presentaron de 22/7 = 3.142856.

Una vez visto todo lo anterior, no estamos seguros si nuestras dudas y ansiedades se disiparon, persisten o, se incrementaron. Cualquiera sea la respuesta de una cosa estamos seguros. "***Pienso, luego persisto***". Es decir persistir en nuestro afán, hasta encontrar la respuesta o respuestas que nos indiquen el camino a seguir, para ir descubriendo nuevos caminos como lo está haciendo Jorge E. Molina con la interpretación tetraléctica iconográfica del mismo guardían de "La Puerta del Sol", dándonos nuevas formas de interpretación, a las que él llama: *"Las Lecturas Tetralécticas Bidimensionales de los tres Primeros Números Perfectos (1 x 4; 6 x4 y 7 x 4).* En el anexo[10] a su libro "La Prueba Matemática del Pi en Tiwanaku"

[10] Este anexo está publicado por Editora Beohleuvya Tel. ++591-2-796572 - La Paz Bolivia. E- Mail: eduarda@zuper.net.

GEOMETRÍA NO EUCLIDIANA

EL QUINTO POSTULADO DE EUCLIDES.

Desde los tiempos de Euclides, muchos estudiosos se perturbaban con el quinto postulado de los elementos. Ese postulado parece anómalo. Aun admitiendo que el principal objetivo de la organización de los hechos geométricos en riguroso sistema deductivo sea apenas exhibir de manera clara y elegante las conexiones lógicas vigentes entre los principios de la disciplina; el quinto, postulado parece fuera de contexto, dada su complicada forma. La formulación de los otros postulados. La complejidad del quinto postulado se asemeja a los de algunos teoremas demostrados por Euclides - uno de los cuales inclusive es el opuesto lógico del propio postulado. Un sistema mucho más atrayente podría resultar, en caso de que él quinto postulado fuese pasible de eliminación. Se añade que, si pensásemos como los griegos admitiendo que el objetivo anhelado, al organizarse la Geometría en rigurosa forma deductiva, sería demostrar teoremas, nos gustaría de poder disponer de los postulados obviamente verdaderos, tan claramente verdaderos cuanto fuera posible - pues la credibilidad que asociamos a los teoremas por el hecho de ser deductibles de los postulados, no puede ser mayor que el grado de credibilidad asociado al postulado que tenga menor credibilidad. También bajo ese prisma, el quinto postulado parece diferente a los demás, no poseyendo el carácter de obvia verdad auto-evidente, que caracteriza los otros postulados. El quinto postulado además de mucho más intrincado es menos claramente verdadero.
Innumerables pensadores, tentaron a lo largo de los siglos siguientes eliminar el quinto postulado, insatisfechos con él, procuraron diversas maneras de apartarlo del sistema visando mostrar que no precisaría merecer la condición de postulado. Comentadores de Euclides, griegos y árabes, igualmente, procuraron diversas veces eliminar el quinto postulado, mostrando que sería un teorema del sistema. Las tentativas no resultaron satisfactorias. Las propaladas demostraciones contenían un

error de naturaleza lógica o admitían algún principio en general no explícito y tan complicado cuanto el propio postulado.
Las iniciativas revelaron que existen numerosos principios geométricos capaces de subsistir el quinto postulado de Euclides; principios que asociados a los otros postulados; permitiría la demostración de los conocidos teoremas euclidianos. Así, por ejemplo: el principio que asevera que por *un punto situado fuera de una recta sólo se puede trazar una paralela a la recta dada*, es un principio que puede subsistir al quinto postulado euclidiano. Ese principio conocido como axioma de Playfair, ocupó el lugar del quinto postulado en una versión de Geometría euclidiana que estuvo bastante en boga durante el siglo XVIII, el hecho de que el principio pudo substituirlo se debe al nombre no muy apropiado: "*postulado de las paralelas*", dado frecuentemente al quinto postulado euclidiano. El principio de que la suma de los ángulos rectos también puede substituir el quinto postulado por el principio que afirma, que *dados tres puntos cualesquiera no colineales, precisamente hay un círculo que pasa por ellos*. Ahí tenemos por lo menos tres principios que podrían ocupar el lugar del quinto postulado, sin debilitar al sistema - esto es, sin disminuir el número de teoremas deductibles. No hay sin embargo ninguna razón para sustentar que cualquiera de esos principios alternativos sea significativamente más simple que el postulado original de Euclides.

LA DEMOSTRACIÓN DE SACCHlERl

Una forma de revelar que el quinto postulado no seria independiente de los demás postulados consistiría en un empleo por una vía indirecta del raciocinio llamado reductio ad absurdum: admitir para efectos de argumentación, que el quinto postulado sea independiente de los demás postulados y mostrar en seguida que esa hipótesis conduce a una contradicción, debiendo por tanto ser falsa. Ese método fue empleado en siglo XVIII por el matemático italiano Sacchieri. Él admitió inicialmente que los cuatro primeros postulados de Euclides eran verdaderos; aún más, admitió la hipótesis de que cualquier segmento rectilíneo podría ser indefinidamente prolongado para tomarse tan extenso cuanto se desease - hipótesis que está sugerida en el segundo postulado euclidiano, el mismo que no figura de modo explícito. Admitió luego, para efectos de discusión, que el quinto postulado era falso. Consideró entonces un segmento AB en cuyas extremidades eran levantadas dos perpendiculares AC y BD de igual longitud.

Partiendo de esos presupuestos, Sacchieri mostró que en cualquier cuadrilátero de esa especie el ángulo ACD debe ser igual al ángulo BDC. Esos ángulos que Sacchieri denominó: "ángulo tope" permiten lanzar tres hipótesis: I.- O ellos son rectángulos; II.- O ellos son obtusos; III.- O son agudos - en cualquiera de los rectángulos de las especies consideradas apenas una de esas hipótesis deben ser correcta, admitiendo que el espacio sea uniforme de modo que aquello que vale para figuras trazadas en un lugar dado y un determinado instante, sea una verdad geométrica para figuras cualesquiera, trazada en lugares diversos y en diferentes épocas. Partiendo de sus premisas, Sacchieri pudo revelar, que el quinto postulado Euclidiano debe ser verdadero, en caso que la hipótesis I sea verdadera; habiendo admitido la falsedad del quinto postulado, dejó de lado la hipótesis I. Sacchieri también pudo abandonar la hipótesis II, dadas las premisas que admitió, pues ella es incompatible con la presuposición de que un segmento pueda ser extendido hasta alcanzar cualquier longitud deseable. Quedó pues apenas, la hipótesis III. Sacchieri procuró mostrar que esa hipótesis era incompatible con sus presuposiciones y creyó justificada la idea de abandonarla en virtud de algunas extrañas consecuencias que acarreaba. Sin embargo, no obtuvo ningún éxito en la tentativa de mostrar que esas consecuencias de la tercera hipótesis serían imposibilidades lógicas. Sí el matemático hubiese tenido éxito, mostrando que III era lógicamente incompatible con sus presupuestos habría completado su demostración. Habría llegado a la contradicción que el método de la reductio ad absurdum procura. La contradicción estaría en el hecho de que una de las hipótesis debería ser verdadera, ninguna de ellas, pudo entretanto ser verdadera a la luz de lo admitido. Eso significaría que las presuposiciones no podrían ser todas verdaderas. llegando conjuntamente a 1a demostración de que el quinto postulado no podría ser independiente de los demás postulados, Sacchieri no llegó al objetivo deseado. En realidad, sin embargo y sin percibirlo, consiguió un resultado bien diverso y muy importante. Obtuvo innumerables consecuencias deduciendo hechos paralelos a los teoremas euclidianos, más curiosamente diferentes de ellos. Demostró varios teoremas fundamentales de un tipo completo nuevo de la Geometría.

GEOMETRÍA DE LOBACHEVSKY

Lobachevski, Nikolái Ivánovich (1793-1856), matemático ruso, fue uno de los primeros en aplicar un tratamiento crítico a los postulados fundamentales de la geometría euclídea. Nació en Nizni Nóvgorod y estudió en la Universidad de Kazán Entre sus obras destacan *Sobre los principios de la geometría* (1829) y *Geometría imaginaria* (1835).

Al iniciar el siglo XIX, tres matemáticos, sin ningún contacto mutuo y sin previo conocimiento de los trabajos de Sacchieri, desarrollaron independientemente, un tipo nuevo de Geometría. El matemático alemán Gauss, aunque no hubiese divulgado sus ideas al respecto, probablemente fue el primero en conocer la posibilidad lógica de construir una Geometría diferente de las de Euclides. Fue Gauss, el que introdujo la expresión “no-euclidiana”, para describir un tipo de Geometría que en suma es la hipótesis de Sacchieri relativa a los ángulos agudos. El matemático ruso Lobachevsky y el matemático húngaro Bolyai János (1802-1860) independientemente publicaron versiones del mismo tipo de Geometría. Al contrario de Sacchieri, que había considerado absurda su hipótesis relativa a los ángulos agudos, los otros dos matemáticos desarrollaban aquello que admitían conscientemente, ser un nuevo tipo de Geometría lógicamente consistente.
Los principios de esa geometría eran extraños y bien diferentes de los principios euclidianos. En esa nueva Geometría es posible hacer pasar más de una paralela, por un punto exterior a una recta dada. La suma

de los ángulos de un triángulo es siempre menor que dos rectos, y la diferencia en relación a dos rectos queda determinada en proporción al área del triángulo, triángulos que limitan áreas diferentes, no pueden, por lo tanto ser similares. Además de eso, la razón entre la longitud de una circunferencia y su diámetro es siempre mayor de ***n***; la razón aumenta si aumenta el área limitada por la circunferencia. Extraños principios, es verdad, más perfectamente coherentes; ninguno de ellos contradice a los demás.

GEOMETRÍA DE RIEMANN

En el decorrer del siglo XIX el matemático alemán Riemann Bernhard (1826-1866) y, de modo independiente, también otro alemán, Helmholtz Hermann Ludwig Ferdinand von (1821-1894), desarrollaron otro tipo de Geometría, correspondiente a la hipótesis de los ángulos obtusos debida a Sacchieri. En esa Geometría son negados tanto el quinto postulado euclidiano, como la posibilidad de alargar arbitrariamente, un segmento dado. Cada segmento admite una longitud máxima que puede llegar a alcanzar. Por dos puntos dados es siempre posible trazar más de una recta. La suma de los ángulos de un triángulo es siempre mayor que dos ángulos rectos, siendo el exceso proporcional el área del triángulo. La razón entre la longitud de una circunferencia y su diámetro es invariablemente inferior a n y decrece a medida que aumenta el área del círculo limitado por la circunferencia. Todo lo anterior hizo que la expresión de Gauss , “Geometría no-euclidiana” fuera aplicada a la Geometría de Lobachevscky y a la Geometría de Riemann.
En realidad, Riemann desarrolló sus concepciones no a través del criterio postulacional, más a través de la generalización y ampliación de la noción de “curvatura” antes estudiada por Gauss. Analizando superficies y las ecuaciones que las describen, Gauss había introducido la noción de geodésica - la línea de una superficie que constituye la menor distancia entre dos puntos de esa misma superficie.

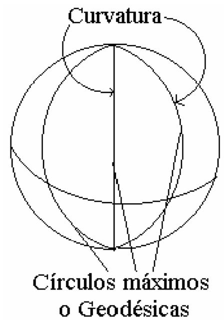


Fig. 11

Mostró que la naturaleza de las geodésicas en una superficie dada, depende de una determinada propiedad de la misma superficie definida y bautizada por Gauss, "Curvatura". (Fig. 11). En una superficie plana las geodésicas son rectas, como es obvio la curvatura de tal superficie, se dice que es cero. En las superficies esféricas, las geodésicas también son todas semejantes, son arcos de círculos máximos; se dice que la superficie esférica tiene curvatura positiva uniforme, siendo la magnitud de la curvatura entretanto proporcional al volumen de la esfera. En la superficie de un huevo sin embargo, las geodésicas no seria análogas, difiriendo según la orientación asociada a los puntos, aunque sean colocados en una región dada, se dice que la superficie ovalada es curvatura positiva, variable de punto a punto. Una superficie que tenga la forma de una silla de montar es de curvatura negativa.

Riemann generalizó la noción de curvatura introducida por Gauss, de modo que se pueda aplicar también al espacio tridimensional, posibilitándonos para hablar de la curvatura de regiones del espacio tridimensional, o sea de cuánto la geometría de un volumen del espacio difiere de la Geometría euclidiana. La Geometría de Lobachevsky examina un espacio en que todas las regiones son análogas desde el punto de vista de la curvatura, dotadas, invariablemente de una curvatura constante negativa. La geometría riemanniana, a su vez considera un espacio cuyas regiones tienen siempre curvaturas constante y positiva. Es claro que queda abierta la posibilidad de considerar espacios cuyas regiones tienen siempre curvaturas constante y positiva. Es claro que queda abierta la posibilidad de considerar espacios de muchos otros tipos en que la curvatura no permanezca constante. Es decir que tanto para las superficies bidimensionales como para los volúmenes tridimensionales del espacio, la “curvatura” es definida básicamente en función de las propiedades matemáticas de ecuaciones que caracterizan las geodésicas.

GEOMETRÍA NO INTERPRETADA Y SUS INTERPRETACIONES.

Se tornó común distinguir en las últimas décadas lo que se llama "*GEOMETRÍA PURA*" y lo que se llama "*GEOMETRÍA APLICADA*". La *Geometría Pura* sería la geometría examinada bajo el prisma abstracto que ya discutimos, la *Geometría Aplicada* sería, la Geometría estudiada bajo el prisma de la distribución de significados específicos a los términos. Ese modo de describir las cosas es un tanto inadecuado, adoptándolo, tendríamos posiblemente que clasificar a Euclides como un Geómetra Aplicado y no como Geómetra Puro dando la impresión que él no estaría haciendo MATEMÁTICA, más algo parecido con la ingeniería - impresión desconcertante - Hablemos pues, en *sistemas no – interpretados*, para contrastarlo con *sistemas interpretados*, en vez de hablar de Geometría Pura y Geometría Aplicadas. Podremos así decir; que *Los Elementos* de Euclides se presentan como sistema interpretado (ya que él atribuía en verdad, significados definidos a los términos que empleaba). De acuerdo con lo que decimos, sin embargo es conveniente pensar en los sistemas Geométricos como sistemas no - interpretados, al tentar estudiar de modo riguroso, la estructura lógica del sistema. En especial en el caso de las *Geometrías no-euclidianas,* es importante encararlas como *sistemas no interpretados*, cuando se examinan demostraciones de teoremas. Al estudiar un sistema, considerándolo *como no-interpretado*, no se da atención a los significados que los términos primitivos poseen (si es que poseen), y no se da atención al hecho de los axiomas y teoremas, si fueren verdaderos y falsos (como puede ocurrir), si los términos utilizados no tuvieren significados específicos - ya que las sentencias no son calificadas de verdaderas o de falsas cuando los términos que encierran están faltos de significado - El primer postulado de Euclides afirmaba que se puede trazar una recta por dos puntos. Eso equivale a decir que dados dos puntos cualesquiera, existe una recta a que cada uno de esos puntos pertenece. Enunciando el postulado de manera esquemática podemos decir que:

1. *Dados dos distintos P, existe una R, con la cual cada uno de los P mantiene la relación R.*

En vez de que hablemos de puntos, hablamos de *P*, en vez de hablar de rectas, hablamos de *R*; y en vez de hablar de que una cosa pertenece a otra, hablamos de que una cosa mantiene con otra una relación *B*.
El segundo postulado de Euclides afirmaba que un segmento rectilíneo podía ser prolongado para transformarse en una recta. Eso equivale a decir, que dado un segmento cualquiera, con dos extremidades, existe una recta a la que estas dos extremidades pertenecen, más de modo que apenas una de las extremidades continúe siendo extremidad. Este postulado esquemáticamente seria enunciado así:

2. *Dada una R cualquiera de modo que dos P mantienen con R la relación E, existe otro R con la cuál los dos P mantienen la relación B, pero con ella apenas uno de los P mantiene la relación E.*

Hablamos aquí, en relación *E*, en vez de hablar en una cosa que es extremidad de otra.
Repitiendo el proceso, podríamos enunciar todos los postulados de Euclides y todas las definiciones que él empleó dándole esa forma esquemática, podríamos, inclusive, ante ver la manera de enunciar de modo esquemático cualquier cosa que podría ser dicha para examinar la *LÓGICA FORMAL DEL SISTEMA DE EUCLIDES*. Se torna fácil mantener abstracto nuestro punto de vista, en cuanto estudiemos cuestiones a cerca de la deductibilidad de conclusiones a partir de postulados o a cerca de demostraciones propuestas investigando esas cuestiones empleamos apenas las versiones esquemáticas de las sentencias en causa, ya que nos interesan solamente las deducciones que sean válidas exclusivamente en virtud de las formas lógicas. En consecuencia, no damos atención a lo que “P”, “R” y otras letras pueden querer decir y es fácil, pues esas letras no tienen significados particulares.
Decimos que hemos interpretado de todo un sistema *no - interpretativo* cuando escogemos un significado para cada una de las letras que aparecen en sus postulados y teoremas Esquemáticos. En cuanto esas letras permanecen *no - interpretadas*, las sentencias esquemáticas no son ver-

daderas ni falsas, más después de haber atribuido un significado a cada letra los postulados y teoremas se transforman en enunciados que son verdaderos, o falsos. De modo general, se notará que un *sistema no - interpretado* admite interpretaciones diversas, siendo que según unos, algunos o todos sus postulados y teoremas se transforman en enunciados falsos, en cuanto otras interpretaciones transforman todos los postulados y teoremas en enunciados verdaderos.

INCONSISTENCIA

Los adversarios de las *Geometrías no-euclidianas* alimentaban la esperanza que tales Geometrías serían inconsistentes. Veamos lo que eso quiere decir, *inconsistencia*, en el sentido que interesa a la Matemáticas no está asociada a los especiales significados que puedan tener los vocablos de los sistemas. La inconsistencia se asocia a la estructura lógica abstracta del sistema. Decir que un sistema es inconsistente es decir que los axiomas de ese sistema podemos deducir dos teoremas que se contradicen mutuamente (en adelante pasaremos a usar la palabra "axioma" y no "postulado"). Para ilustrar, supongamos un sistema de cuyos axiomas fuese posible deducir el teorema *"para todo **S** hay un **P** con el cual **S** mantiene la relación R*", y paralelamente, el teorema "*hay por lo menos un* **S** *que no se relaciona, por medio de la relación a cualquier* **P***"* Los dos teoremas se contradicen uno con otro, eso quiere decir que el sistema al que ambos pertenecen, es un sistema inconsistente.
¿Cómo descubrir que un sistema es inconsistente? El proceso directo, está claro, es encontrar dos teoremas que contradigan uno al otro, en virtud de sus formas lógicas, ambos deductibles del modo riguroso a partir de los axiomas. Demostrar consistencia sin embargo, puede ser tarea más complicada. Distinguiremos, en este momento, dos maneras de hacerlo y luego una tercera. La primera seria hallar una interpretación bajo la cual todos los axiomas (y por consiguiente todos los teoremas) fuesen definitivamente verdaderos. La limitación inherente a

ese procedimiento está en que exige un conocimiento perfectamente definido a cerca de la verdad de los enunciados interpretados: y solamente en el caso de no haber duda en torno a la verdad de tales enunciados interpretados se podrá hablar que hubo éxito en la demostración de consistencia. Otro método para la demostración de consistencia, es el que establece la consistencia relativa: mostrando que un sistema dado es consistente siempre que el otro sistema menos confiable también lo sea. Eso se consigue mostrando que si existe una interpretación capaz de tomar verdadero este otro sistema, habrá también una interpretación capaz de tomar verdadero al sistema en discusión.
Empleando este segundo método, los matemáticos, del final del siglo XIX, llegaron a importantes resultados relativos a la consistencia de las Geometrías de Lobachevsky y de Riemann, Aquellos matemáticos pudieron establecer que las Geometrías no-euclidianas deben ser consistentes en caso sea consistente la Geometría de Euclides. A fin de ilustrar la idea que sirve de paño de fondo para el método examinemos un modo de abordar la Geometría de Lobachevsky, la que nació de sugestiones hechas por el matemático francés Poincaré. Considérese una esfera en la que ocurre este hecho peculiar; cosas que están en el interior de la esfera decrecen uniformemente de tamaño a medida que se apartan del centro de la esfera, tomándose ilimitadamente menores cuando se aproximan a la superficie, sus pasos se toman cada vez más cortos y ellos nunca alcanzan la superficie. En ese sentido el interior de la esfera es para los habitantes un universo infinito.

Supongamos que los habitantes de la esfera empleen la expresión línea recta para designar la menor distancia entre dos puntos, tal como esa distancia es medida por sus cintas métricas. Supongamos, aún más, que los habitantes interpreten los demás términos geométricos de manera adecuada y correspondiente, diciendo, por ejemplo, que “un triángulo” es la figura formada por tres de tales líneas rectas. La Geometría del Universo de nuestros habitantes de la esfera es una Geometría Lobachevskyana. La suma de los ángulos de un triángulo será siempre inferior a dos ángulos rectos, tanto menor cuando mayor fuera el área del triángulo, por un punto situado fuera de una recta será posible trazar más de una paralela a la recta dada y así por delante.

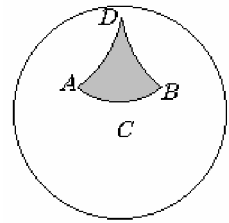


Fig. 12

Ilustrando con la figura 12, tenemos, sea C el centro de la esfera; "Un triángulo de vértices A, B y D”, tendrá entonces los lados que se curvan, en virtud el encogimiento de las cintas métricas (los lados del "triángulo" deben ser las menores distancias de uno a otro vértice tales como son determinadas por las cintas métricas; para usar la cinta el menor número de veces, se debe acompañar una trayectoria curva que tiende a minimizar el efecto de acortamiento de la cinta).

Ahí esta la razón de ser la suma de los ángulos del triángulo inferior a dos ángulos rectos. Aquí sólo podemos abordar la cuestión de un modo informal, el objetivo sin embargo es mostrar que si la Geometría Euclidiana fuere consistente, será consistente la de Lobachevsky. Si la Geometría Euclidiana fuere consistente, entonces ese “modelo” Euclidiano que acabamos de describir también deberá ser lógicamente, consistente y así, siendo los principios de la Geometría Lobachevskyana que fueron interpretados de modo que rigiesen nuestro "modelo" también deberán ser consistentes.

GEOMETRÍA INTERPRETADA Y SU CARÁCTER EMPÍRICO

Las *Geometrías no-euclidianas* fueron desarrolladas y se mostraron tan lógicamente consistentes como la Geometría euclidiana. ¿Refuta eso de modo concluyente la tradicional idea filosófica de que el conocimiento Geométrico sería sintético y "a priori"?
¿Que es lo que una persona podría estar alegando a propósito de una línea o alegar que es recta?

Hay diversos tipos de procedimientos adaptados en la vida común para determinar si una línea es o no recta asociada a tales procedimientos, existen varias diferentes nociones al respecto del carácter rectilíneo de una línea. Se consideró en conexión con el ejemplo de Poincaré que a la línea recta la correspondería la noción de menor distancia entre dos puntos. Según esta noción para saber si una dada línea es recta procuramos saber si ella es la trayectoria más corta entre esos puntos. Por tanto es preciso disponer de medios para efectuar medidas de distancia utilizando cintas métricas. por así decir, (el procedimiento será e de extender la cinta, o la regla, de modo que en cada repetición de la operación una extremidad de la cinta o regla sea colocada exactamente donde la otra extremidad había quedado) El método será directamente aplicable solamente en aquellos casos en que pueda admitir que el instrumento de medida no se contraiga o dilate cuando él es dislocado. Sí la cinta métrica fuera de metal y la temperatura fuera muy variable, la expansión térmica introducirá errores a menos que se puedan efectuar las correcciones que el caso requiera.
Diversos modos razonablemente plausibles de interpretar el término "recta" ya fueron citados. Puesto que ese tipo de aserción hacen la sentencia de una Geometría no interpretada" cuando las interpretaciones de una u otra de esas maneras. Es claro que las interpretaciones sugeridas transforman la sentencia de la Geometría en enunciados empíricos. Por un punto situado fuera de una recta ¿cuántas rectas paralelas a la recta dada podrán ser trazadas (esto es, en el mismo plano de la recta dada y

sin encontrarla jamás)? Sea cual fuera la interpretación escogida de entre las propuestas, esa pregunta se transforma en cuestión empírica para ser resuelta por la observación y la experimentación. En el caso de cualquiera de las interpretaciones dadas, se trata de una cuestión empírica saber si el universo es Euclidiano, Riemanniano o Labachevskyano o algo parecido.

GEOMETRÍA INTERPRETADA Y SU CARÁCTER APRIORI

Es positivamente cierto que todavía resta una forma de interpretación de "línea recta" y de otros términos básicos de la Geometría que merecen consideración - modo en entender esos términos que están enraizados en el discurso cotidiano - Este otro modo de interpretar "línea recta" no asocia el término de manera estricta a cualquier tipo de resultado experimental, como la trayectoria de un rayo luminoso, la trayectoria a lo largo de la cual una cinta métrica precisaría ser colocada en menor número de veces. Según esta concepción de línea recta, observaciones de esa especie sin tener carácter conclusivo, tenderían a indicar que la línea sería recta. Según esta concepción, es parte esencial de línea recta el hecho de que un triángulo cuyos lados son rectas, tenga ángulos cuya suma sea igual a dos ángulos rectos; Si hallamos un triángulo cuyos ángulos sumen más que dos ángulos rectos, ese hecho mostrará decisivamente que la figura no será formada con líneas rectas. Según esa manera de ver los términos geométricos, lo que deberíamos decir describiendo el resultado de la teoría de la relatividad de Einstein no sería que existen triángulos no-euclidianos. En vez de eso deberíamos decir, aunque pueda parecer sorprendente que los rayos luminosos no describen líneas rectas al pasar por campos gravitacionales no homogéneos; y deberíamos decir, así eso pueda parecer sorprendente que las cintas métricas disminuyen su longitud, pues precisan ser extendidas mas frecuentemente cuando son empleadas en los campos gravitacionales fuertes. Ya sabíamos que los rayos luminosos no describen líneas rectas para atravesar medios de índices diversos de refracción, sabíamos que las cintas métricas se dilatan y se contraen al variar la temperatura. Lo que estos descubrimientos de la física moderna revelan según la concepción que estamos examinando ahora, es justamente el hecho de que los campos gravitacionales, también pueden afectar la trayectoria de los rayos luminosos y las longitudes de las cintas métricas.

No hay nada de absurdo o de característicamente inapropiado en torno a ese modo de encarar la Geometría. Y eso basta para mostrar que la concepción examinada en la última sección es demasiado estrecha; Los axiomas y teoremas de una Geometría interpretadas no precisan ser enunciados empíricos pueden ser enunciados a priori.

NÚMEROS Y FILOSOFÍAS ESTRICTAS A CERCA DE LOS NÚMEROS.

Ha sido muy común desde los tiempos de Euclides presentar la Geometría en forma de un sistema axiomático. Algunos otros modos de presentar las Geometrías fueron adoptados por los matemáticos modernos; el criterio axiomático sin embargo continuó siendo utilizado de modo amplio sirviendo para presentar la materia a los principiantes. Nuestra Matemática de los números sin embargo, no ha sido tradicionalmente organizada en forma axiomática. La Aritmética, el Álgebra de colegio así como ciertos tópicos de análisis, digamos de, el Cálculo Integral fueron habitualmente presentadas en forma de colecciones de reglas de computación y no en forma de sistemas axiomatizados de leyes. La diferencia se debe a una especie de accidente histórico. Nace del hecho de que nuestra moderna Matemática de los números se originó en la Matemática de los babilonios, hindúes y árabes y no de la Matemática de los Griegos. Los griegos trataron en verdad, de los problemas numéricos dándoles entre tanto interpretaciones Geométricas en otras palabras al desconfiar de una cuestión a cerca de la magnitud comparativa de los números, los Griegos tratarían del problema como si fuera un problema a cerca de las longitudes de dos líneas o cerca de las áreas de dos figuras. Los babilonios, los hindúes y árabes (a quienes debemos la palabra álgebra) inclusive introdujeron gradualmente símbolos y reglas de cálculo que tornaron posible tratar las cuestiones numéricas de un modo más abstracto y eficiente de lo que era viable para los Griegos. Los babilonios, hindúes y árabes, no obstante, como era típico en la Matemática oriental, no se preocupaban mucho de las demostraciones, ni con la organización de sus conocimientos a cerca de los números, a colocarlos de un modo que tuviera forma axiomática. Sucedió entonces que la Geometría pasó a ser enseñada, a través de la edad Media y a inicios de la Edad Moderna con la forma axiomatizada que le había dado Euclides, en cuanto a la Matemática de los números pasó a ser enseñada como colección, comparativamente desconecta de Leyes y de

Reglas de calcular. Esa situación está sufriendo por fin algunas alteraciones, uno de los trazos marcantes de las matemáticas del siglo XX es el creciente empleo del método axiomatizado, aplicado a otros sectores de la materia y no apenas a la Geometría.
Desde sus comienzos el desarrollo de la Matemática de los números debe haber dado origen a perplejidades filosóficas. Los números enteros 1,2,3, etc., no son por cierto muy embarazosos ya que su legitimidad nos parece clara cuando contamos los animales de una horda o los presidentes de un país. Las fracciones no son tampoco muy perturbadoras ya que las podemos encarar como cocientes de números enteros, muy útiles para comparar tamaños de tierras o duraciones de tiempo; podemos imaginar, sin embargo, que debe haber habido un movimiento de inquietud cuando los babilonios, deseando referirse al resultado obtenido al sustraer un número de sí mismo, introdujeron el símbolo para el cero, tratándolo después como si el cero fuese uno de los números enteros. El cero parece vacío que es como la nada; ¿cómo es posible pues, hacer referencias al cero admitiendo que sería alguna cosa, un número genuino? La inquietud disminuyó gradualmente, sin duda, cuando se percibió que el cero es adecuado para “contar" el número de animales de un campo vacío o el número de presidentes de un período republicano. La introducción de símbolos para los números negativos debe haber sido otra fuente de dudas; los números negativos parecen ser de algún modo, números que no están ahí, fantasmas imaginarios de números, ¿sería legitimo llamarlos números? En los tiempos modernos la introducción de símbolos para los números imaginarios despertó cuestiones semejantes. Así, se admita la legitimidad de un discurso a cerca de los números negativos ¿no sería ir muy lejos, hablar de la raíz cuadrada de “-1” como si fuera un número? ¿No sería más sensato decir que -1 no admite raíz cuadrada?
Las perplejidades filosóficas creadas por las varias especies de números se redujeron considerablemente gracias al trabajo dé los matemáticos del siglo XIX, del que resultó una teoría unificada los números. La importante conquista de esos matemáticos fue mostrar de qué manera las teorías matemáticas relativas a los tipos más sofisticados de núme-

ros podían ser “reducidas” o "elaboradas a partir de" teorías relativas apenas a los números de especie básica, aquellos matemáticos revelaron de qué modo cada uno de los tipos más complicados de números, bien como las operaciones (como la adición y la multiplicación) que con tales números se efectúan, podían ser definidos en términos en términos de los números enteros y de las operaciones con que éstos se efectúan. Mostraron que eso es viable y que puede ser hecho de tal manera tomando las leyes que gobiernan las especies más sofisticadas de números deductibles de las leyes que gobiernan los números enteros.
Esa conquista fue denominada artimetización del análisis, pues trata de revelar de qué modo las partes de las Matemáticas reunidas bajo el título de Análisis pueden ser “reducidas” a la parte elemental de la Aritmética (o teoría elemental de los números, como también es llamada) suplementada por algunas nociones que luego las haremos, la teoría unificada de los números nos permite considerar las varias especies de números como elementos de una única familia, todas ellas resultantes de una especie común y todas sometidas a las leyes que decorren deductivamente de las leyes que valen para la especie común. Si aceptamos esa teoría unificada de los números, no precisamos alimentar dudas especiales, concernientes a las especies más elaboradas de los números; las dudas que restaren podrán ser concertadas apenas sobre los números naturales, esto es, aquellos números que utilizamos para hacer cuentas. Examinemos, de modo rápido, cómo podríamos “reducir" los tipos superiores de números.

Además de todo lo anterior, sin embargo, tenemos un problema de carácter conceptual. ¿A qué llamamos número? Los símbolos que comúnmente utilizamos. ¿Pueden realmente llamarse números? ¿Qué cualidades, o propiedades básicas debe poseer un símbolo, para ser llamado de número? Hasta donde sabemos, se puede dar el nombre de número al *cardinal* de un conjunto, pues, ese cardinal indica el *número de elementos* que están determinados en dicho conjunto. Así, si un conjunto “A”, está formado por cuatro elementos cuyo nombre de cada elemento es silla, #4 es el cardinal del conjunto “A”, luego, el *número* es *4* *sillas*, y no simplemente 4 Pero cuando estos símbolos forman parte de un conjunto ya no reciben el nombre de números y se pasa a llamarlos *numerales*. P. Ej. Si un conjunto "N" está formado por los elementos *1, 2, 3, 4,* que son símbolos matemáticos el nombre de cada elemento es *numeral*. Si no aplicamos correctamente este simple concepto de número, donde un numeral debe estar acompañado del nombre, eso implicaría por ejemplo que el conjunto "N" equivaldría a 10 si sumamos el valor que representa cada numeral, al ser tomado como número. Si eso fuera así, imaginemos lo que representaría un conjunto cuyos elementos numerales, sean mayores que 1 y menores que 10 000. Consideramos que no vale la pena ni pensarlo.

Aunque lo veremos más adelante, sin ahondar en más detalles, estos simples ejemplos nos dicen que ya es hora de que revisemos el concepto número. Estamos convencidos de que todos los mecanismos de operaciones que hemos aprendido con los llamados *números*, seguirían teniendo igual validez, si, en lugar de decir: "adición de números naturales", dijéramos: "adición de numerales naturales". Pues, los símbolos no alterarían su formato y seguiría siendo utilizados con las mismas propiedades operacionales.

¿Será posible hallar la solución desde un punto de vista nominalista? Lo veremos más adelante.

Con estas cuestiones colocadas en la mesa de discusiones y mientras no haya una convención matemática de carácter general, pese a nuestra aspiración de salir de los moldes del modo de pensar e inferir occidental, seguiremos bajo los moldes tradicionales a fin de no perjudicar nuestro trabajo.

LOS NÚMEROS NATURALES.

Los números **0,1,2,3**, etc. (Que debieran llamarse numerales), constituirán nuestra especie fundamental de números llamados números naturales infelizmente la expresión es un poco ambigua, pues, algunos autores incluyen el 0 entre los naturales, mientras otros no lo hacen más no nos preocupamos por eso. La idea intuitiva que tenemos de los números naturales es que son todos números cada uno de los cuales puede ser obtenido principiando con cero y sumando 1, tantas veces, cuántas fueren necesarias. El matemático italiano Peano fue el primero en organizar las leyes fundamentales de esos números en un cuerpo axiomático, y su conjunto de 5 axiomas es notable. Examinemos esos axiomas para conocer más de cerca los números naturales y para ver, en seguida de qué modo otras especies de números pueden ser reducidas a especie natural. Los axiomas de Peano, puestos en palabras son estos:

1. **0** *es un número natural*[11].
2. *El sucesor inmediato de cualquier número natural es también un número natural.*
3. *Números naturales distintos, nunca tienen el mismo sucesor inmediato.*
4. **0** *no es el sucesor inmediato de cualquier número natural.*
5. *Si algo vale para* **0** *y, valiendo para un número dado, también vale para su sucesor inmediato, y valdrá todavía para todos los números naturales.*

Esos axiomas contienen tres términos no definidos "Cero", Sucesor inmediato" y "número natural". Los axiomas, por si mismos no nos revelan lo que tales términos deban significar (así entrelacen cualquier significado que los términos puedan tener) y no nos den cualquier evidencia a favor del hecho del que los términos pudieran referirse a cual-

[11] Este es un tema en discusión entre los matemáticos, unos consideran que el 0 no es un número natural, porque no empezamos a contar de cero

quier cosa real. Si deseamos aceptar los axiomas como verdaderos, será preciso que fijemos los significados y proveamos por nuestra cuenta esa evidencia. En la base del empleo de esos términos, en tales axiomas está la hipótesis tácita de que cero" se refiere, realmente a alguna entidad bien definida entre las que están bajo el examen y de que para cada una de esas entidades en tela de juicio, existe, de hecho apenas una entidad que es su sucesor inmediato. Se sigue de los axiomas también que cero su sucesor, el sucesor de este, y así por delante, son todos números naturales, se sigue aún (en vista del quinto axioma) que más nada será un número natural. De los axiomas deviene que debe haber una infinidad de números naturales, ya que la sucesión no puede ser interrumpida, ni puede en circulo, retomar al punto de partida (por cuanto cero, no es un sucesor inmediato de un número natural). El quinto axioma es particularmente importante porque expresa la presuposición o el presupuesto en que se asienta la inducción temática (una importante forma de raciocinio matemático deductivo es que nada tiene que ver con el raciocinio inductivo examinando en otro capítulo). Podemos concebir de qué modo opera el raciocinio por inducción matemática imaginando una serie de piezas de dominó colocadas de pie, una al lado de las otras, en fila: supongamos saber que la primera pieza va a caer y que, al caer una de las piezas, la siguiente también cae, estamos aptos, en ese caso, a inferir que todas las piezas van a caer, no importa cuantas sean. En el mismo espíritu, si sabemos que algo vale para el cero y que valiendo para un dado número natural, valdrá igualmente para su sucesor inmediato, estamos en condiciones de inferir que ese algo vale para cada uno de los números naturales. Con base en los axiomas de Peano Giuseppe (1858-1932), matemático italiano. Podemos introducir los nombres de los números siguientes "uno", por definición nombra el sucesor inmediato de cero; "dos" por definición nombra el sucesor inmediato de uno y así por delante.

Los axiomas de Peano, explican, de modo claro, las propiedades esenciales de los números naturales. No bastan sin embargo, por sí mismos, para efectuar la reducción de otras especies mas elevadas de números -

admitiendo que se continúa a emplear los mismos principios lógicos, relativamente elementales, utilizados para deducir los teoremas de la Geometría- Y no permiten la reducción por dos motivos. En primer lugar, los axiomas de Peano no nos ofrecen, tales como están, una teoría completa de los números naturales. Si nos limitamos a los tres términos primitivos de Peano y los cinco axiomas que él formuló, será posible (empleando principios normales y elementales de la lógica) definir la adición y la multiplicación de modo, a darles el sentido general que tienen cuando se trata de tales números: será imposible formular y - a fortiori - demostrar en el sistema, leyes como la que afirma que la suma de números naturales M y N es siempre igual a la suma de N y M, o la que afirma que el producto de M por la suma de N y P es igual a la suma del producto de M por N y del producto de N por P (Nótese que ni siquiera nos preocupamos por sustracciones o divisiones, pues esas operaciones no pueden ser libremente efectuadas con los números naturales) En segundo lugar, es preciso, para la reducción de las especies más elevadas de números, emplear dos otros términos muy importantes, "conjunto y par ordenado", que Peano no incluyó entre sus términos primitivos (y que no pertenecen a la lógica, usual, elemental).

Para nuestros fines, los términos "conjunto" y "par ordenado" precisan ser entendidos de manera vaga. Un conjunto es una clase, colección, o grupo de cosas; las cosas que pertenecen a un conjunto pueden ser de cualquier tipo, concretas o abstractas, semejantes entre sí, o al contrario muy distintas unas de las otras. El único punto esencial es que el conjunto debe ser concebido como una entidad única, distintas las cosas que son sus elementos. Consideremos el conjunto de filósofos, esto es el conjunto cuyos elementos son cada uno de los filósofos y nada más. Ese conjunto es muy diferente de cada uno de sus elementos: cada elemento es un filósofo, más es el conjunto de filósofos no es por cierto, un filósofo, el conjunto es numeroso (o sea, tienen varios elementos) más ninguno de sus elementos es numeroso. El conjunto, por tanto, precisa ser distinguido de sus elementos. Dos conjuntos se dicen idénticos sí y sólo sí, poseen exactamente los mismos elementos así por ejemplo, el conjunto de los triángulos equiláteros es idéntico al conjun-

to de los triángulos equiángulos. Es permitido hablar de conjuntos vacíos, esto es, de conjuntos que no tienen elementos, a la luz de ese criterio de identidad sin embargo todos los conjuntos vacíos son idénticos y sólo puede haber un conjunto vacío. Así, el conjunto de unicornios es idéntico al conjunto de círculos cuadrados, ya que ambos poseen los mismos elementos –ninguno - un conjunto es un subconjunto de otro, cuando todos los elementos del primero son elementos del segundo, así el conjunto de los filósofos es un subconjunto de los seres humanos. Es preciso, entre tanto distinguir entre subconjunto y elemento: Platón es un elemento, más no un subconjunto del Conjunto de los filósofos, al paso que el conjunto de filósofos es un subconjunto (más no un elemento) del conjunto de los seres humanos.
El término "par ordenado" también precisa ser entendido de manera más o menos vaga. Un par ordenado consiste en dos cosas de cualquiera especie tomadas en cierto orden. Las cosas pueden ser concretadas o abstractas, semejantes o no. Un "par ordenado" (Q,Y) se dice idéntico a otro par ordenado (Z,W) si y sólo sí, los dos primeros ítems fueren idénticos (X es idéntico a z) y los dos últimos ítems fueren idénticos (Y es idéntico a W). Es posible definir pares ordenados como cierta especie de conjuntos de conjuntos, más eso es indispensable hacer aquí.
Imaginemos ahora, poseer un sistema axiomático en que todas las leyes fundamentales de los números naturales puedan ser expresadas y demostradas y donde puedan ser expresadas y demostradas las leyes fundamentales para "reducir" las especies más elevadas de números.

DEFINIENDO ESPECIES MÁS ELEVADAS DE LOS NÚMEROS.

El proceso de reducción de las especies más elevadas de números a los números naturales se efectúa en una serie de fases naturales, inicialmente desarrollamos una teoría de números racionales enteramente basada en nuestra teoría de los números naturales, de los conjuntos y de los pares ordenados. Luego desarrollamos una teoría de los números reales relativos, esto es dotados de signo. De ahí pasamos a los números complejos. En cada una de las faces admitimos que se haya comprendido lo que son los números de la especie procedente y lo que es igualmente importante - admitidos saber lo que significa sumarios o multiplicarlos. Definimos de esa manera lo que son los números de las especies siguientes y lo que significa sumados o multiplicarlos. Habiendo ampliado el dominio de los números a modo de incluir, por fin todas esas especies de números, podemos ver, de que manera los números complejos - los que se hallan más apartados de los números naturales - serían reducidos a los números naturales, pues explicamos los racionales en términos de los naturales, los reales en términos de los racionales y los números complejos en términos de los reales relativos (es importante notar que los números complejos tienen componentes imaginarios, como la raíz cuadrada de menos uno

Al ampliar el dominio de los números es importante notar, en relación a esa jerarquía de números, que el número uno, por ejemplo, admite varios significados diferentes. Surge el inicio como nombre de ~n número natural (el sucesor inmediato de cero). Surge después como el nombre de un número racional (un número racional que es el conjunto de pares ordenados de números naturales y el número uno es el conjunto de que contienen los pares ordenados (1,1); (2,2); (3,3); y todos los innumerables pares de números naturales “iguales a estos" Surge en seguida, como, el nombre de un numero real (un número real es un conjunto de racionales y el número real 1 es el conjunto de todos los innumerables racionales menores que el racional uno) es preciso distinguir el número natural uno, del racional uno, del real uno y así por delante. El mismo numeral se acostumbra emplearlo para representar cualquiera de ellos, más ellos son entidades matemáticas esencialmente diferentes

Ese desarrollo que acabamos de esbozar o sugerir visa a mostrar todas las especies más elevadas de números y las operaciones que con ellos podemos efectuar se definen a partir de los números naturales y de las operaciones que con ellos efectuamos. Aún más, visa elaborar esas definiciones de una manera que se pueden deducir las leyes de tales especies más elevadas de números obedecen, de leyes básicas que gobiernan los números naturales. El desarrollo es de importancia filosófica, no sólo como ejemplo del pensamiento matemático, más por mostrar que aceptamos esas deducciones en nuestras perplejidades filosóficas y en nuestras preocupaciones de los números, las que podrán ser concentradas exclusivamente sobre los números naturales y sus leyes asociados a los conjuntos y los pares ordenados con las leyes propias de éstos.

NÚMEROS TRANSFINITOS.

Al presentar las definiciones de las especies más elevadas de números, empleamos el término "conjunto" La idea de desarrollar una teoría de los conjuntos y tratarla como disciplina autónoma se remonta al Matemático alemán George Cantor (1845-1918, nacido en San Petersburgo - Rusia), que la concibió al final del siglo XIX La contribución especial de Cantor, fue su teoría de los números finitos y los números transfinitos.
La teoría de Cantor se valió de la importante noción de correspondencia uno a uno (o biunívoca) El ejemplo siguiente nos da una noción de esa correspondencia. Consideremos los pasajeros de un ómnibus; si cada pasajero ocupa un asiento el conjunto de pasajeros y el conjunto de asientos estarán en correlación biunívoca. En esas circunstancias el conjunto de pasajeros, tendría como es claro, el mismo número de elementos que tendría un conjunto de asientos - no importando cual fuese ese número - por otra parte si cada asiento estuviese ocupado por un pasajero y hubiesen pasajeros viajando de pie, el conjunto de pasajeros sería más que el conjunto de asientos. Consideramos en ese ejemplo dos conjuntos finitos (no podría existir un ómnibus de tamaño infinito). La idea de Cantor era que los conjuntos infinitos también podrían estar en correlación de uno a uno tornando posible la comparación de conjuntos, aún en el caso de contener una infinidad de elementos. Cantor sustentaba que dos conjuntos infinitos deberían ser considerados de la misma magnitud, si y solamente si fuese posible correlacionar sus elementos uno a uno, y que un conjunto infinito debería ser considerado mayor que otro si y solamente si correlacionados los elementos desde el

último conjunto uno a uno, a los elementos del primero siempre restasen algunos elementos de ese primer conjunto. Así por ejemplo el conjunto de números impares y el conjunto de números pares son de la misma magnitud ya que es posible correlacionarlos biunívocamente, quedando cada número impar asociado a su sucesor inmediato, es decir, asociamos el primer número impar al primer número par y, en general el enésimo número impar al ***n***-ésimo número par, y de ese modo Cantor en forma sorprendente pudo establecer las respectivas relaciones contra los conjuntos de los números racionales y de los números naturales, el conjunto de los reales y los naturales y así por delante con los otros conjuntos de números.

Cantor desarrolló una teoría de los números cardinales transfinitos. Un número cardinal mide la magnitud de un conjunto finito o no, los cardinales transfinitos miden las magnitudes de conjuntos infinitos - como los que examinamos - El conjunto de números naturales posee el menor número cardinal transfinito, al conjunto de números reales tienen un número cardinal transfinito mayor; el conjunto de todos los subconjuntos del conjunto de números reales tienen un número cardinal transfinito aún mayor, Cantor llegó a que cada conjunto no vacío, finito o no, tiene más subconjuntos de que elementos.

Eso quiere decir que el número cardinal del conjunto de subconjuntos de un conjunto dado no vació debe ser siempre mayor que el número cardinal del conjunto dado. Eso garantiza que siempre existen cualquiera que sea el cardinal dado, cardinales mayores que ese cardinal.

Podemos pensar en los resultados de Cantor como teoremas del sistema axiomático ya anteriormente concebido, siempre cuyos axiomas expresan las leyes básicas de los números naturales de los conjuntos y de los pares ordenados.

Si el cardinal del conjunto vacío está representado por el “cero” y dado que “*el conjunto de números naturales posee el menor número cardinal transfinito*”, no será que el “cero” resulta de ese modo antes que transfinito un “pre-infinito”?

¿DEBEMOS TENTAR INTERPRETAR LA TEORÍA DE LOS NÚMEROS?

La mayoría de los matemáticos se limitó a trabajar con los números naturales sin desconfiar de que el término "Número natural", podría significar y sin desconfianza saber si tenemos razones para creer que tales entidades realmente existen. Se limitaron a seguir las consecuencias lógicas de hipótesis iniciales, como aquellas enmarcadas en los axiomas de Peano, admitiendo que la Matemática, llena de modo cabal, sus finalidades propias al establecer que sus teoremas son deductible de sus axiomas no interpretado y puede ser investigada de modo lógico y abstracto. Más el punto de vista avanza, por cierto, la señal, cuando procura impedir reflexiones acerca de la naturaleza y de la existencia de los números.

La importancia intelectual de la teoría de los números como un cuerpo de conocimientos no brota apenas del hecho de ganar la forma de un sistema interesante y lógicamente consistente. Depende también, de la existencia de algún interesante sentido en que los axiomas de la teoría de los números puedan ser verdaderos. La importancia intelectual del sistema crecería si pudiéramos encontrar alguna interpretación interesante que lo tomase verdadero. Al contrario de lo que sucede con la Geometría de Lobachevsky la teoría dé los números es continuamente empleado tanto en la ciencia como en la vía común. Parece plausible por tanto admitir que exista alguna interpretación capaz de tomar esa teoría verdadera. El modo más directo, así no sea el único, de explicar por qué la teoría de los números encuentra aplicaciones útiles en la ciencia y en la vida práctica, sería mostrar que la teoría encuentra aplicaciones útiles en la ciencia y en la vida practica, seria mostrar que la teoría admite una interpretación particularmente importante, la que transforma sus leyes en verdades de gran valor al ser utilizadas como premisas de raciocinios científicos o de raciocinios comunes.

El NOMINALISMO

El nominalismo es la corriente que sustenta que no existen cantidades abstractas y, es más específicamente, es la corriente que afirma no existir entidades abstractas que puedan ser identificadas a los números. Sería posible entonces, a un nominalista, sustentar, que existen medios de interpretar las teorías de los números de modo de tomar la verdadera. ¿Puede decir él, que la matemática de los números habla efectivamente de cosas cuya existencia es aceptable para el nominalismo? Hagamos algunas consideraciones sobre el raciocinio nominalista.
Muchas personas, preguntadas a cerca de lo que sean los números, responderán, que los números son ideas de nuestra mente. Esa línea de pensamiento, es siempre atrayente para las personas que confronten cuestiones filosóficas relativas a la existencia de alguna cosa problemática. Supongamos que una "idea", quiera decir, aquí, imagen mental o fenómeno mental análogo en el sentido de un pensador individual. Una "idea" de esa especie tendría que ser algo que surge, en un instante dado, dura algún tiempo y después cesa. Estaría perfectamente localizada en el tiempo y aunque no estuviese en el espacio y no sería pues, una entidad abstracta tal como lo entendemos. La hipótesis de que los números son ideas de esa especie precisa, ser considerada como forma de Nominalismo (aunque se aproxima al conceptualismo al asociar los números en la mente).
La propuesta de que los números sean encarados como ideas, es fácilmente formulada, más está lejos de ser satisfactoria. Como tentativa de ofrecer una interpretación que tome verdadera la teoría de los números la propuesta bajo muchos aspectos deficientes. En primer lugar, la teoría de los números afirma que sólo existe un número natural cero; sin embargo, si los números fuesen ideas, en el mencionado sentido, habría tantos ceros diferentes cuantas fuesen las personas, que tuviesen la idea de cero. La teoría de los números también sustentan que cada número natural admite un sucesor inmediato, mientras como es probable existen números naturales (grandes números) para los cuales ninguna persona

llegó a formar algún día las ideas de sus sucesores inmediatos. La hipótesis se refiere a la existencia de sucesores inmediatos de esos grandes números naturales. Además de eso, la teoría de los números no puede ser verdadera, a menos que haya una infinidad de números, y es dudosa quizás en ese sentido (la afirmación de que las personas poseen una infinidad de ideas de números en sus mentes). Debemos concluir que esa vía del pensamiento según la cual los números serían ideas, no ofrece cualquier interpretación de la teoría de los números capaz de tomar sus axiomas en teoremas.

Otra versión del Nominalismo, recurre a entidades físicas, en vez de recurrir a entidades mentales. Distinguiremos, por costumbre, los números de los numerales, un numeral es un signo de cierto aspecto, que encaramos como nombre de un número, así el numeral arábigo 5" y el numeral romano "V" habitualmente son encarados como nombres del número "cinco". Supongamos sin embargo que identificaremos los números a los numerales, supongamos que diga que los números no son nada más que numerales, eso parece transformar los números en algo definido y perceptible, no puede haber duda acerca de a existencia de los numerales pues, podemos verlo, identificando números y numerales parece que liberamos a la Matemática de su independencia de las identidades abstractas.

Esta versión del nominalismo, todavía no es más satisfactoria que la anterior. Esa manera de interpretar los axiomas de la teoría de los números, tampoco los transforma en verdades, literalmente hablando. Así por ejemplo, la teoría de los números asevera que cada número natural posee, un sucesor inmediato, si los números fuesen numerales entretanto eso no seria verdadero. Si un numeral significa un signo particular, escrito en un papel, en la camisa de un atleta, o alguna cosa parecida, entonces existe una cantidad enorme de numerales correspondientes a los números pequeños y no existen numerales correspondientes a los grandes números, aquellos a los que nadie se habrá referido, de modo específico por escrito.

Sí no es posible considerar los numerales, tal vez el nominalista pudiese identificar cada número natural, a un objeto del mundo físico. Su-

pongamos que el nominalista, elabora su interpretación de los términos primitivos de la teoría de los números de una manera que pueda hacer que el símbolo "0" se refiera al pico del “Illimani "numeral *“1”*al Huaina Potosí, "numeral 2" al Chacaltaya, y así por delante, serviría eso de interpretación nominalista para la teoría de los números? Nó, porque una cantidad infinita de objetos seria necesaria; y no hay tal cantidad de montañas en el mundo, y no se puede tener certeza a cerca de la existencia de un número infinito de objetos de cualquier especie, inclusive los electrones en todo el Universo, nunca se llega a observar, más que un número finito de objetos de cualquier género, el raciocinio inductivo, basado en la evidencia de las observaciones, nunca podría establecer, como probable cualquier conclusión a propósito de la existencia de un número infinito de cosas observables.
Parece imposible apartar la conclusión que la teoría de los números no puede decidir una interpretación nominalista capaz de transformarla literalmente en una verdad. El nominalista convencido deberá de considerar el sistema de la teoría de los números, como incapaz de decidir una interpretación verdadera. Está claro que decir, que los axiomas y teoremas de las Matemáticas de los números no se tornan verdades no equivale, necesariamente a negarles utilidad; la prosa falsa y hasta la prosa sin sentido pueden ser útiles durante la vida - ayudándonos a ganar elecciones y a construir puentes - Más el nominalista convencido no debe encarar la matemática de los números como un cuerpo de conocimientos literalmente hablando. Si lo hiciese, estaría, según algunos no nominalistas, efectuando la *reduction ad absurdum* del propio nominalismo.

EL CONCEPTUALISMO Y LOS INTUICIONISTAS

El conceptualista necesita de cualquier modo reconocer que hay una diferencia entre desear y crear, en esa actividad lírica de creación. Se añade que los principales defensores de las concepciones conceptualistas admitieron que los poderes creadores del espíritu son muy limitadas, estando sujetos a más imposiciones de lo que a la simple consistencia lógica.

El más ilustre representante de la corriente conceptualista relativa a la matemática es el filósofo Kant. Sustentaba él, que las leyes de los números como las de la Geometría euclidiana, eran al mismo tiempo, a priori y sintéticas. Aunque Kant no haya dejado tan explícitas sus ideas, acerca de la filosofía de los números, cuando dejó explícitas sus impresiones a propósito de la filosofía del espacio, dice lo bastante para fijar en sus lectores, la noción que para él, nuestro conocimiento de los números se asienta en una conciencia de tiempo entendida “forma pura de intuición" y una conciencia que el espíritu posee de su propia capacidad de repetir, seguidamente, el acto de contar. He aquí la explicación que ofrece la posibilidad de existencia de tal conocimiento sintético y a priori: al conocer las leyes de los números; el espíritu gana una visión de su propio funcionamiento interior, y no de la realidad, como ella es en sí mismo.

La concepción Kantiana de la Aritmética basada en la intuición del conteo parece pretender decir que los números existen, sí y sólo sí pueden ser obtenidos por medio del acto de contar; se presume, también que Kant apreciaría haber dicho que los conjuntos existen, si y solamente sí sus elementos pudieran ser contados. En consecuencia no habrá número mayor pues es siempre posible seguir el conteo más allá de cualquier número que se ha alcanzado a contar. Más no habrá ningún número infinito (número transfinito) porqué sería imposible contar hasta lo infinitamente elevado (eso requeriría de un periodo infinito de tiempo según Kant y no disponemos de ese tiempo infinito) De manera análoga una recta no alcanza su longitud máxima según la Geometría Kantiana, por cuanto es siempre posible extender en la imaginación cualquier segmento ya trazado, sin embargo no puede haber una recta infinita, por cuanto no se pueden en la imaginación trazar una recta de longitud infinita (eso también exigiría un tiempo infinito) En periodos más recientes, una filosofía de la Matemática de saber kantiano fue revivida por un grupo de matemáticos, liderizados Brouwer. Este matemático holandés, sustentaba como Kant que "la pura intuición" del conteo temporal sería el punto de partida para la matemática del mundo; la filosofía de ese grupo recibió por eso, el nombre de INTUICIONISMO. Para esos matemáticos modernos, sin embargo, el intuicionismo no era apenas una teoría filosófica tal como la de Kant: era una concepción que impregnaba el propio trabajo matemático efectuado por el grupo. Y a tal punto que los juicios a cerca de la validad de los argumentos matemáticos diferente de los juicios Matemáticos ajenos al intuicionismo.

Del punto de vista del intuicionismo debemos disponer de una demostración constructiva de cualquier enunciado Matemático a propósito de los números, antes de estar autorizados para decir que sabemos de verdad de ese enunciado. Si el enunciado afirma la existencia de por lo menos un número de tal o cual especie, debemos saber como construir o computar ese número usando apenas un número finito de fases. Si el enunciado asevera que todos los números son tal o cual especie, debemos estar en condiciones de demostrar apenas aquella especie. De manera semejante, es preciso, disponer de una contra-demostración constructiva de cualquier enunciado antes de poder decir que se sabe de su falsedad.

La concepción filosófica del intuicionismo relativa a la creación de entidades Matemáticas, puede naturalmente desligarse de sus principios relativos a la práctica matemática. Los que separados de su lastre filosófico parecen arbitrarios y carentes de justificación. ¿Para qué abandonar ciertos tipos de procedimientos matemáticos en general aceptados hasta determinada época, si eso no deviene de un principio filosófico?.

INTRODUCCIÓN A LA TOPOLOGÍA.

La Topología creada por Riemann con el nombre de ANLYSIS SÍTUS, es el "estudio de la continuidad" en Geometría, de su mantenimiento en las transformaciones y de las invariantes correspondientes, debemos su desarrollo a Poincaré. Es decir que estudia la propiedad de las figuras con independencia de su tamaño y forma. Por ejemplo las diferentes formas de una figura geométrica dibujada en una superficie elástica estirada o comprimida son equivalentes.

TOPOLOGÍA GEOMETRÍA DE LA CONTINUIDAD.

La Topología o ANÁLISIS SYTUS es una rama moderna de la Geometría, en la que no intervienen la noción de magnitud o de medida, sino únicamente la de continuidad, se ocupa pues solamente de las propiedades cualitativas de las figuras.

Es posible definir al objeto de la Topología de la manera siguiente: Se dice que una propiedad de un conjunto es topológica si puede ser expresada por medio de la noción de continuidad. Una propiedad topológica de un conjunto se llama invariante Topológica sí se conserva todo homeomorfismo. LA TOPOLOGÍA ES EL ESTUDIO DE LAS PROPIEDADES TOPOLOGICAS Y SOBRE TODO EL ESTUDIO DE LOS INVARIANTES TOPOLOGICOS DE LAS FIGURAS.

DESARROLLO DE LA TOPOLOGÍA.

Como ya hemos dicho. Riemann expuso en 1851 las primeras aplicaciones de la Topología Combinatoria a las matemáticas clásicas, estudiando relaciones profundas entre la teoría de las superficies y las teorías de las funciones. Los trabajos de Mobius. Jordan Shalfli, Dick, Betti y Kronecker, constituyeron los primeros resultados importantes de esta ciencia. Pero los más notables progresos se deben a los cinco informes publicados por H. Poincaré, sobre la Topología combinatoria. Estas combinaciones que perfeccionaron en 1895 la teoría sistemática de la Topología Combinatoria tal como hoy se la entiende constituyeron el punto de partida de gran número de investigaciones, entre las cuales citaremos las de Brouwer, Lebesgue, Vable, Alexander, Lefschetz, Alexandroff y Hopf.

Independientemente de la teoría Combinatoria, George Cantor fundó en 1879 la Topología conjuntista con su teoría de Conjuntos. Fue el primero en definir las nociones Topológicas fundamentales en el espacio Euclidiano en las "Dimensiones". La teoría de Cantor fue ampliamente utilizada y difundida por la escuela Francesa de la Teoría de Funciones. Luego se generalizaron las ideas de Cantor a los conjuntos de curvas y superficies por influjo de Ascolí de Volterra y de M. Hadamard en 1884. Esta generalización, por lo demás se vinculaba estrechamente con la creación del cálculo funcional por parte de Volterra, en 1887. En 1904, Frechet advirtió que la naturaleza de los elementos del conjunto (puntos, curvas, funciones etc.) era poco importante y que lo esencial residía en la estructura Topológica entre los elementos del conjunto.

Así deducimos las propiedades topológicas comunes a los conjuntos de puntos y de funciones, Frechet llego a generalizar el concepto de espacio y a introducir la Topografía de los espacios abstractos, espacios cuyos puntos son elementos abstractos de cualquier naturaleza. Desde entonces, la Topología conjuntista ha adquirido un nuevo desarrollo para convertirse en lo que se denomina la Topología General, que continúa enriqueciéndose con los trabajos de Choquet y Lichnerowicz.

Con el propósito de tener una noción más exacta de lo que es la Topología trataremos de precisar nuestras ideas sobre esta rama fundamental posible. De la definición intuitiva dada por Henri Poincaré (1854-1912) resulta que la topología es ante todo el estudio de las propiedades Geométricas cualitativas.

En Geometría elemental, la mayoría de las propiedades estudiadas son métricas, tales son por ejemplo, la igualdad de dos triángulos, la relación de Pitágoras entre la hipotenusa de un triángulo rectángulo y los dos lados de su ángulo recto, la propiedad de un cuadrilátero de ser un rombo, un cuadrado, etc. Para esta geometría las curvas parecen estar constituidas por un material rígido e indeformable. Sólo podemos desplazarlas en el plano o en el espacio y en este desplazamiento dichas curvas conservan sus formas y sus dimensiones. Un segmento de recta sigue siendo un segmento de recta y la distancia entre sus extremos, inmutable. Nos vemos obligados a situar dentro de una misma categoría a todas las curvas superponibles y solamente a ellas. Por extensión podemos incluir en la misma categoría las figuras simétricas de una figura dada en relación a un plano o a un punto que a pesar de no ser superponibles por lo general, conservan esta propiedad de superposición segmento por segmento. Volvemos a encontrar al grupo de los giros, grupo principal de la Geometría métrica elemental. Pero en esta Geometría existen figuras que aún cuando carecen de propiedades cuantitativas equivalentes tienen ciertas propiedades cualitativas intuitivamente idénticas. Consideramos por ejemplo un circulo, un cuadrado y una corona circular (parte de plano situada entre dos circunferencias). La simple intuición nos permite convertir propiedades comunes a los dos primeros que no tiene la tercera. Por ejemplo, sea cual fuere la línea poligonal cerrada conversa situada en el interior del circulo o del cuadrado la superficie que limita se halla integralmente en el interior de la superficie limitada por la circunferencia por el cuadrado. Resulta claro que esta propiedad no se cumple en el caso de la corona circular de la figura. El interior del circulo y del cuadrado son equivalentes en lo referente a esta propiedad cualitativa, cosa que no sucede con el interior de una corona circular.

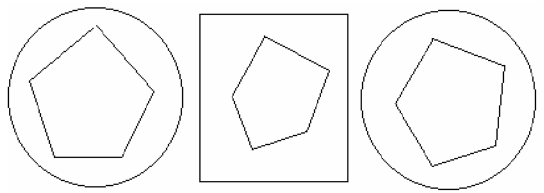


Fig. 13

Ello parece obedecer al hecho de que podemos pasar de una circunferencia al perímetro de un cuadrado por deformación continua, mientras que intuimos la imposibilidad de un pasaje semejante de esas figuras a las dos circunferencias que limitan la corona circular. Llegamos así a imaginar una geometría en la cual las curvas estarían constituidas por un material deformable y extensible como ser hilos de caucho que podríamos deformar, alargar o contraer a voluntad. Desde ese punto de vista el cuadrado y la circunferencia que consideramos, son la misma curva. Ya no podemos distinguir una elipse de un circulo o de una línea poligonal simple (no cruzada).
Todas esas curvas - si nos limitamos por el momento a curvas planas - poseen propiedad que acabamos de describir. Poseen también muchas otras. Siendo la principal, la de dividir el plano en dos partes; dos puntos de una misma parte siempre pueden unirse por una línea poligonal plana sin que ésta alcance la curva limite, mientras que dos puntos tomados respectivamente en cada una de las partes carecen de esa propiedad. Este es el célebre teorema de Jordan cuyas condiciones de validez hemos de precisar al final de este capitulo.

EL CONCEPTO DE CURVA

Ahora que la intuición nos ha permitido deducir lo esencial de aquello que exigimos a nuestras nuevas curvas estamos en condiciones de definir axiomáticamente estas curvas, y todas sus propiedades topológicas deberán derivar de dichos axiomas y solamente de ellos.
Si deformamos un hilo elástico, obtendremos una nueva forma más o menos alargada o contraída, más o menos recta o sinuosa, pero como siempre se trata del mismo hilo, habrá de mantenerse la distribución de los puntos de la continuidad. Podemos entonces suponer que estas curvas satisfacen los axiomas de orden y de continuidad comprobados para las rectas por Hilbert y Dedekind, Además debemos completar estos

axiomas de modo que inicialmente según una recta Euclidiana y una curva cerrada que posea la siguiente propiedad de la recta proyectiva; al recorrerla siempre en el mismo sentido se vuelve finalmente al punto de partida.

Considerando con F, Enriques una curva ilimitada en los dos sentidos, que comprende una infinidad de puntos y que no vuelve a contarse, diremos que satisface los axiomas de distribución de la recta euclidiana (Hilbert):

I. *Si A, B, C, son tres puntos de una curva y si B se halla entre A y C se halla también entre C y A.*

II. *Si A y C son dos puntos de una curva, existe por lo menos un punto B de esta curva situado entre A y C y un punto 1) de dicha curva, tal que C se halla entre B y D.*

III. *De tres puntos A, B y C de una curva siempre hay uno, y sólo uno, situado entre los otros dos:*

IV. *Cuatro puntos A. B y C y D de una curva pueden ser distribuidos siempre de modo que B se halla en A y C lo mismo que entre A y D y que C se halle entre A y D lo mismo que entre B y D.*

Estos axiomas muestran que en una curva pueden determinarse dos sentidos opuestos de recorrido. La continuidad habrá de definirse gracias a un axioma análogo al axioma de Dedekind sobre la recta proyectiva.

V. *Sí, AB. es un segmento de curva y se divide dicho segmento en dos partes tales que:*

   1° Cada punto del segmento pertenece a una de las partes.

   2° A pertenece a la primera parte y B a la segunda.

   3° En el sentido de recorrido de A hasta B, un punto cualquiera de la primera parte precede a un punto cualquiera de la segunda.

   Por consiguiente, existe un punto C del segmento de curva AB (que puede pertenecer a una de las partes) de modo que todo punto del segmento precedente C pertenece a la primera parte y todo punto del segmento siguiente C pertenece a la segunda.

Consideremos ahora, una curva limitada por dos puntos A y B. Si suprimimos estos dos puntos obtendremos a una curva ilimitada en ambos sentidos (admitiendo que existe siempre un punto, entre A y un punto cualquiera M de la curva y entre M y B), con respecto a la curva ilimitada así obtenida rigen los cinco axiomas precedentes. Resulta de ello que existen en AB dos sentidos de recorrido, uno de A hacia B. y el otro, de B hacia A.
Consideramos ahora, dos curvas limitadas AB y CD, tales que C coincide con B y C.
El conjunto de estas dos curvas se llamará curva cerrada. Es fácil observar que dichas curvas cerradas responden a todos los axiomas de la recta proyectiva.
Pero no hemos de insistir más sobre estas arduas cuestiones que sólo hemos querido abordar aquí para mostrar hasta qué punto, estos problemas aparentemente intuitivos exigen un gran esfuerzo de abstracción. Será suficiente recordar que hemos podido definir axiomáticamente tres clases de curvas; curvas ilimitadas (o abiertas), curvas limitadas y curvas cerradas. En cada una de ellas existen dos sentidos de recorrido, opuestos y continuos.

EL CONCEPTO DE SUPERFICIE.

Retomemos uno de los ejemplos desarrollados en el comienzo del capitulo si consideramos la superficie de un círculo o la superficie plana limitada por el perímetro de un cuadrado, toda curva poligonal convexa trazada en el interior de una de esas superficies, limita un área que se halla totalmente contenida en ella. Imaginemos que la superficie interior del círculo sea de un material deformable y extensible de caucho como el hilo que la limita. Podemos deformarla por entero y aplicarla sobre la del cuadrado. Tendremos así una concepción de las superficies que conserva la propiedad que hemos comprobado. Aun cuando deformemos esa superficie con el fin de aplicarla sin desgarramiento ni superposición sobre la superficie de una esfera, la propiedad seguirá subsistiendo.

Existen muchas otras propiedades que no se modifican con esa deformación y de las cuales daremos como ejemplo un balón de basquetbol o fútbol. Todas estas propiedades que son invariantes en esas transformaciones de figuras, se denominan topológicas, y son las que estudia la topología.

Pero la superficie de caucho puede considerarse formada por dos haces de hilos de caucho entrecruzados y cuyos puntos comunes son los puntos de la superficie. Por lo tanto, podemos considerar una superficie como el conjunto de puntos pertenecientes a dos haces de curvas F y F que satisfacerlas siguientes condiciones:

1° Un punto de la superficie pertenece a una curva F y a una curva
2° Una curva F y otra F' tienen en común un punto, y sólo uno de la superficie.
3° Sobre dos curvas cualesquiera que haz F (o F') las curvas de haz F' (o f') las curvas de F' (o F') cortan series de puntos que se suceden en determinados sentidos.
Estas dos últimas condiciones expresan en particular la no-superposición de la superficie de caucho que deformamos. El conjunto de haces F y F' constituye lo que se denomina una red análoga a la de las paralelas a los ejes de las coordenadas en el plano cartesiano.

El grupo principal de la topología, si deformamos una figura de caucho sin desgarramiento ni superposición, podremos comprobar, que existen relaciones notables entre la figura inicial F' y su estado final F".

1° A todo punto de F' corresponde un punto y sólo uno de F"
2° A todo punto de F" corresponde un punto y uno sólo de F"
3° A dos puntos próximos a F' corresponden dos puntos próximos a F"
4° A dos puntos próximos a F" corresponden dos Puntos próximos a F'
5° Si F' es una curva F" es una curva y a través de los puntos A', B', C' de F' corresponden tres puntos A'. B y C' de F" situados en el mismo orden.

Las dos primeras propiedades expresan el hecho de que la transformación T que asocia F'' y F' es una transformación puntual biunívoca Por consiguiente, admite una transformación inversa T_{-1} también puntal biunívoca. La tercera propiedad expresa la continuidad de T. y la cuarta (que resulta por lo demás de las tres primeras) la de T_{-1}
Así mismo, las dos últimas que surgen recíprocamente en virtud de las dos primeras (y que por otra parte son consecuencia de las cuatro primeras) expresan el hecho de que la correspondencia considerada se halla ordenada. Esta transformación T se denomina *HOMEOMORFICA* o también *TRANSFORMACIÓN TOPOLÓGICA.*

De todo ello se deduce que para definir axiomáticamente nuestra transformación T, podemos elegir, entre las seis propiedades que acabamos de comprobar, las propiedades independientes que nos resultan más cómodas de las cuales surgirán las demás. La definición que nos parece más intuitiva es la que dan Frechet y Ky Fan en su introducción a la Topología Combinatoria (1, initiatión, Vulbert, 1946)
"*Un homeomorfismo entre dos figuras (o dos conjuntos de puntos) es una correspondencia tal que a cada punto de una de las figuras corresponde un punto y sólo uno de la otra y que dos puntos próximos a una corresponden dos puntos próximos a la otra*."

Para usar un lenguaje más "matemático" se *llama homeomorfismo, a toda transformación biunívoca y bicontínua*.
Pero es interesante que nos demos cuenta de qué manera podemos retomar este punto de vista haciendo desempeñar el papel esencial de la idea de orden. Consideremos con Godeaux (Les Geométries, Colección A. Colin) Una transformación puntual y entre los puntos de espacios de la geometría elemental que satisfagan, por ejemplo, las siguientes condiciones:

1° La transformación es biunívoca.
2° Ella hace corresponder a los puntos de una curva los puntos de otra curva.

3° A dos pares de puntos A B Y C que se separan sobre una curva, hace corresponder dos pares de puntos A' B' Y C' D' que se separan sobre su homóloga.

Este último axioma tiene por finalidad respetar el orden: si se define un sentido de recorrido sobre una curva (K) le corresponde sobre su homologa (k') un sentido de recorrido bien determinado. Dados dos puntos A y B de (D) podemos pues definir un sentido de recorrido sobre esa curva. por ejemplo aquél en el cual A precede a B, procedemos a dividir el conjunto de puntos del arco de curva AB en dos clases (1) y (5) de modo que:

1° Cada punto del arco AB pertenece a una de las clases.
2° El punto A pertenece a (1) y el punto B a (5)
3° Todo punto de (1) precede a todo punto de (5)

Conforme al axioma B enunciado para las curvas, o axiomas de Dedekind, existe un punto del arco AV tal como todo punto que precede a C pertenece a (1) y todo punto que sigue a C pertenece a (5). Sean A' B' y C' los homólogos de A, B y C en la transformación T definida por las condiciones de biunivocasidad y de orden. Al sentido de recorrido ACB de (K) corresponde el sentido de recorrido A' C' B' de (K'). A todo punto del arco A' B' Además todo punto del arco A:B: es homólogo de un punto y de uno sólo del arco AB. De ello resulta que los puntos del arco A'B' se hallan distribuidos en dos clases (1') y (5). Estas dos clases están separadas por el punto C'. Por consiguiente T es continua. La continuidad de T_{-1} resulta evidentemente de la biunivocasidad de T. Un razonamiento análogo al que acabamos de desarrollar demostraría si una transformación es biunívoca y bicontínua, es ordenada. Sean cuales fueren los axiomas de definiciones de esta transformación T, es claro que T_{-1} también los satisface, así como al producto de varias transformaciones del mismo tipo. Por consiguiente, los homeomorfismos constituyen un grupo principal de la topología.

LA EVALUACIÓN EN LA MATEMÁTICA

Hablar de evaluación significa que debemos filosofar y meditar sobre las siguientes cuestiones: ¿Qué es la Evaluación? ¿Entendemos la Evaluación como un proceso o como un acto apenas pre-estadístico? ¿Qué evaluar? ¿Para qué evaluar? ¿Por qué evaluar? ¿Cómo evaluar?.

Antes de continuar y luego de ese cuestionamiento, posiblemente seamos muy pretenciosos al querer hablar de la "evaluación" de la Matemática y aun más, después de lo que hemos visto en los capítulos precedentes en uno de los cuales por ejemplo reconocemos que no existe un acuerdo universal y tácito, si el **0** es o no un número natural y tuviéramos que verificar ese conocimiento, cómo podríamos realizar tal verificación? Sin embargo, consideramos que no sería ninguna pretensión, si comprendemos que en el proceso de la enseñanza-aprendizaje y hoy más *aprendizaje* que enseñanza, la evaluación también es un proceso interactivo con la educación formadora, que acompaña y que tiende a valorar y verificar toda acción didáctica dirigida a ese aprendizaje, que ha debido producir cambios en el alumno.

Desde el instante en que se presentó una acción intencionada de facilitar el aprendizaje del estudiante, se hizo indispensable valorar o evaluar el logro alcanzado en función de los objetivos previstos de ese proceso, indispensable desde el punto de vista del comportamiento de la conducta humana, es decir que el educando como un ser en formación está en un cambio continuo y esos cambios determinan su comportamiento. Por consiguiente creemos que tenemos algunas preguntas y sus posibles respuestas:

¿Qué evaluar? Los logros y cambios de comportamiento del alumno. ¿Para qué evaluar? Para ver si alcanzó los objetivos de la acción didáctica.

¿Por qué evaluar? Porque si no sabemos qué tenemos no podemos decir a donde vamos. Es decir que si la verificación nos muestra que no hemos logrado los objetivos propuestos, no podemos seguir adelante sin

antes obtener los pre-conocimientos que vienen a ser los pre-requisitos de la etapa siguiente.
¿Cómo evaluar?. Dado que no existen recetas, esta es una cuestión difícil de responder, pues depende de lo que se quiere evaluar. Si se quiere evaluar el conocimiento y dominio de una materia o el conocimiento aplicado a la solución de problemas vitales.
Ahora bien, querer verificar el proceso de aprendizaje de la Matemática, tiene que llevarnos a otro cuestionamiento concomitante serio y analítico, procurando su respectiva base filosófica.

¿Los cambios de comportamiento, son favorables o desfavorables?
¿Qué papel juega la Matemática en esos cambios?
¿Cómo hemos valorado el aprendizaje de la Matemática?
Cuándo lo hicimos, supimos descubrir ¿Cómo adquirió el aprendiz sus conocimientos?
¿Hemos hecho hincapié en la valoración de la materia aprendida o en la valoración de los cambios de actitud que el aprendizaje de la Matemática ha producido?
Qué es lo que se ha valorado en la materia:
¿La notación científica?
¿El mecanismo operacional?
¿El razonamiento matemático aplicado a problemas de una situación real?
¿De qué medios nos hemos valido para ello?
Finalmente ¿Hemos sabido interpretar los resultados de esa acción valorativa?
¿Cómo y en qué proporción con relación a los objetivos propuestos?
¿Lo objetivos tenían que ser los logros de los alumnos o los del maestro?
¿Quién propuso esos objetivos, el alumno o el maestro?

Consideramos que las respuestas a éstas y otras preguntas las daremos en la medida en que practiquemos, haciendo un enorme hincapié sobre la importancia que tiene el saber valorar que y cómo aprenden nuestros alumnos, para ello veamos lo que sigue.

FORMULACION FILOSÓFICA DE LA EVALUACION

Nuestra formulación en gran parte debe ser empírica puesto que el aprendizaje en general y la de la Matemática en particular tienen sus leyes naturales como las leyes de las plantas o las de los otros organismos que son susceptibles de crecimiento. Es un proceso en el cual se emplean poderes definidos, que producen resultados también definidos y esos resultados se producen tan regular y tan ciertamente como el día sigue al aparecimiento del sol. El principio de CAUSA y AFECTO es tan cierto - si no tan obvio y fácilmente comprendido - en la evolución de la mente, como en la de la materia y las leyes de la mente son tan fijas con las de la materia.

El descubrimiento de las leyes de cualquier proceso, ya sea de la mente o de la materia, hace posible que ese proceso esté bajo el dominio del que conoce las leyes y gobierna, las condiciones. Por ejemplo el agricultor que desea tener una buena cosecha, tiene que APRENDER a obedecer las LEYES DE LA NATURALEZA (Como nos indicó Rousseau), que se convierten en LEYES DEL APRENDIZAJE. Pues, de la Naturaleza el agricultor, APRENDE. En ninguna parte del mundo de la mente, ni en el mundo de la materia, puede el hombre obtener buenos resultados. A menos que emplee los MEDIOS de los que dependen los resultados.
Seguramente se dirá ¿cuáles son esas leyes del aprendizaje, si éste en su sentido más sencillo es la adquicisión de la experiencia?

Dentro del cuño aun conductista y sin ánimo de entrar en polémica con los pedagogos llamados constructivistas, mientras no nos presenten lo contrario, sobre las variadas leyes que rigen la enseñanza- aprendizaje a continuación tenemos un resumen de siete leyes fundamentales:

I. *LEY DE MAESTRO*.- Se refiere al que conoce la verdad o la lección. El que ha de dirigir el aprendizaje del educando.
II. *LEY DEL DISCIPULO O ALUMNO*.- Se refiere al aprendiz que atiende con interés a la lección y aprende conscientemente.
III. *LEY DEL IDIOMA*.- Se refiere al canal utilizado como medio de comunicación entre el discípulo y el maestro común o entre ambos.
IV. *LEY DE LA LECCIÓN*.- Se refiere a la verdad que ha de ser explicada en términos ya conocidos por el aprendiz. Lo incognocido deberá ser explicado por lo cognocido.
V. *LEY DEL PROCESO DE LA DIRECCIÓN DEL APRENDIZAJE*.- Que es el despertamiento y uso de la mente del aprendiz, para que pueda adquirir una nueva experiencia.
VI. *LEY DEL PROCESO DEL APRENDIZAJE*.- Mediante la cual vemos, que aprender es atesorar en la mente nuevos conocimientos o nuevas experiencias por medio del propio pensamiento.
VII. *LEY DE LA VALORACIÓN O EVALUACIÓN*.- Que nos hace ver cómo *LA VERIFICACIÓN* ha sido dada (o sea el proceso final que asegura el aprendizaje), la *CALIDAD* antes, que la cantidad de lo comprendido, de lo aprovechado o de lo experimentado, ha producido un cambio de comportamiento de acuerdo a los objetivos previstos.

En resumen está ley es a nuestro entender la básica para continuar con el proceso de la aprendizaje y sin el cual no se obtendrían buenos resultados en el proceso formativo y educativo de los aprendices. Esta *ACCIÓN DIDÁCTICA* exige que el educador tiene que usar algún instrumento de valoración y una forma sistemática de verificación que le permita juzgar y valorar todas las faces de la tarea educativa.
Si la *EVALUACIÓN* es la base de *una ACCIÓN EDUCATIVA RACIONAL*, no hay duda que ella nos hará ver que el planeamiento no puede realizarse sin la formulación de un conocimiento "a fortiori".
SI NO SE SABE, QUÉ ES LO QUE SE TIENE Y A DÓNDE SE QUIERE LLEGAR, cualquier acción es nugatoria. Por consiguiente, como en todo proceso de evaluación, así como en todo trabajo de investigación

se deben seguir varias etapas que principalmente podrían determinarse así:

I. ETAPA. *Determinación clara de lo que se pretende evaluar o verificar. El objetivo tiene que ser bien definido, para que la investigación se realice en esa dirección.*

II. ETAPA. *Selección de los instrumentos adecuados a la investigación o evaluación. Reactivos, cuestionarios, paneles, exposiciones etc.*

III. ETAPA. *Revisión y registro de los resultados cuantitativos o cualitativos. Es decir la información continua para mejorar la apreciación y valoración.*

IV. ETAPA. *Interpretación de los resultados, con el objeto de obtener datos útiles para la reconducción del aprendizaje. (esta etapa, es la de mayor jerarquía, pues, es la que nos proporciona el diagnóstico, por tanto nos permite dar un pronóstico)*

ESTRUCTURA DE LA EVALUACIÓN

Si prestamos un poco de atención podremos descubrir que la estructura de la EVALUACIÓN está precisamente en las cuatro etapas anotadas anteriormente, las mismas que se repetirán en forma intermitente hasta alcanzar los objetivos de la acción educativa en general y del aprendizaje de la Matemática en particular, poniendo énfasis especial de que esta disciplina deberá estar en ***función de las necesidades empíricas y vitales del educando*** y no el educando en función de la materia. Esto implica que **la verificación del aprendizaje no puede estar sujeta a un calendario determinado y con espacios de tiempo limitados**. Pues, al decir empírica y vital, estamos queriendo significar que la vida, no, nos evalúa con un calendario predeterminado, lo hace permanente e intermitentemente.

Respondería esa estructura a esta una nueva cuestión de ¿Cómo verificar la calidad del aprendizaje de la Matemática, si lo que más maneja en ella es la cantidad mediante la nota o calificación promocional?

Sólo como ejemplo. Si en una verificación de lo que creemos conocer nos preguntan, si sabemos ¿que es la Matemática?.
¿Cuál sería nuestra respuesta?
¿Responderíamos todos lo mismo?
¿Cuál de las posibles respuestas siguientes sería la correcta?

La Matemática es la Ciencia de la Deducción
La Matemática es la Ciencia de la Cantidad
La Matemática es la Ciencia de los Números
La Matemática estudia los sistemas numéricos
La matemática es estudio de las relaciones entre cantidades, magnitudes y propiedades, y de las operaciones lógicas utilizadas para deducir cantidades.

Como se ve, muchas posibles respuestas y, dependiendo de quien tenga mayor dominio sobre lo que dice una de esas definiciones, creería tener la razón y por tanto considerarse aprobado.

¿Qué clase de valoración tendría la respuesta, cuantitativa, cualitativa. Ambas? ¿Y, bajo que parámetros haríamos esa valoración o verificación?

Si para responder conceptualmente sobre lo que es la Matemática no existe un acuerdo o convención universal.
¿Que podemos decir de otros conceptos considerados de dominio público y universal como: *magnitud, cantidad, sistema* que según su aplicación y contexto cambian de sentido?

Frente a estas nuevas cuestiones, habremos respondido nuestras cuestiones iniciales de ¿Qué evaluar? ¿Para qué evaluar? ¿Por qué evaluar? ¿Cómo evaluar?.

.

¿Sería acertada la respuesta, decir que la Evaluación en general, pero, la de Matemática en particular, debe tomar en cuenta, si, se está pretendiendo verificar el aprendizaje desde el punto de vista del conocimiento, “empírico”, “a fortiori” o “a priori” y, si, la verificación del proceso ha de ser “analítica o sintética? ¿O. Por el contrario es apenas una coletánea de notas o calificaciones que se convertirán en simples datos estadísticos que no nos dicen nada con respecto del aprendiz?

Cualesquiera sean las respuestas a esas cuestiones, no obstante consideramos que la evaluación debe ser:

Un reactivo y no un castigo.
Edificante y no traumatizante.
Constructiva y reflexiva antes que alienante
Promocional y no segregacional.
El camino para la conquista del conocimiento a fortiori y a priori.
El instrumento que conduce al éxito desechando el fracaso.

CONCLUSIÓN

Posiblemente desde que egresamos del Colegio y/o del Instituto Normal muchos de nosotros, no, nos habíamos detenido como ahora a repasar Filosofía en general y Filosofía de la Educación en particular, Es obvio que menos podíamos haberlo hecho sobre Filosofía de la Matemática. A través de los diferentes capítulos hemos tratado de ver, cuánta necesidad tenemos de reformular nuestros conceptos o conocimientos con respecto a la Matemática y las profundas reflexiones que devienen de su estudio.
Al colocar a Rosseau y a Piaget en el primer capitulo no, lo hemos hecho en forma inconexa con los restantes capítulos, era imperativo meditar sobre el sujeto pasivo de la Educación, el aprendiz, ya que él es la motivación para realizar este estudio.
Aunque estas dos celebridades, no son citadas directamente en los capítulos siguientes, sus reflexiones sobre la educación y el desarrollo men-

tal han estado latentes en nosotros y nos han llevado a formulamos cuestiones como la siguiente:
¿Cómo es qué hemos adquirido nuestros conocimientos y, cómo los trasmitimos y hemos transmitido a nuestros alumnos? Por ejemplo cuando Rosseau dice: "*No permita que el alumno aprenda alguna cosa porque usted le dio la información más porque él la descubrió por si mismo*" Rosseau nos muestra la importancia que tiene desarrollar la creatividad y la experimentación, él estaría siendo un "empirista', pero cuando manifiesta que no debemos sustituir la "razón' por la "autoridad" para que el alumno descubra por si mismo, en base, a su razonamiento, la solución buscada, Rousseau nos esta mostrando que no todos los conocimientos se adquieren "a fortiori", más también "a priori". Rosseau no ignoraba la influencia de la sociedad sobre el individuo. Comprendía la presión que de todo lado se ejerce sobre él y en todo caso sobre el aprendiz, por eso pide no sustituir la razón por la autoridad. Justamente ese conocimiento de la realidad del individuo sirvió a muchos sicólogos como punto de partida en la tentativa de entender la dinámica del desarrollo de la personalidad y el carácter.
Piaget, más agudo aún nos muestra la íntima relación entre el desarrollo mental y la edad cronológica del aprendiz. Aunque resumidamente nos hace notar que, las estructuras mentales se acomodan, más claramente indica que muchos conocimientos son adquiridos "a priori", cuando nos dice: "*de la habilidad de percibir un objeto se pasa al desarrollo de la habilidad de formar una imagen mental, cuando ese objeto no está presente*" (Recordemos los ejemplos de los papagayos y la pulga). Es decir que nos hace ver que en la enseñanza-aprendizaje es necesario en lo posible, ir de lo concreto a lo abstracto.

En el capítulo siguiente al hablar de Geometría sobra la forma cómo Euclides la desarrolló como un sistema deductivo, en el cual todos los teoremas derivan de los postulados establecidos explícitamente, hemos visto que le faltó estudiar sobre las "regiones de orden' como lo vimos en la Geometría no-euclidiana. Aunque Euclides cayó en círculos viciosos al efectuar algunas demostraciones por superposición. Esos defec-

tos sirvieron para que estudiosos como Hilbert, David (1862-1943, destacado matemático y filósofo alemán) pudiesen corregirlos. Creemos que nosotros también debemos imitar en algo a estos grandes matemáticos, sí bien no para demostrar quién está equivocado y quién no, más para que al adquirir esos conocimientos geométricos, los sean adquiridos e impartidos de una manera menos árida y más activa y dinámica.
Aunque aparentemente pareciera que la *Geometría no-euclidiana* se presentara con el objetivo de hacer que la Geometría euclidiana es insuficiente, no es esa la verdad, pues, la Geometría no-euclidiana tiene un espíritu unificador antes que disgregador, pues, con ella se ve que distintos matemáticos de distintos lugares con diferentes idiomas" hubieran tratado el mismo asunto y llegado a conclusiones análogas, tal el caso de Lobachevsky y Riemann. Con la Geometría no-euclidiana hemos podido comprender mejor "a priori" la importancia de los nuevos términos geométricos es decir, que tiene que interesamos tanto el valor del descubrimiento empírico geométrico, como la abstracción lógica a partir de su valor de verdad.
Posiblemente para algunos la pregunta ¿Y, por qué, no los tiwanakotas o los Incas? Les parezca una pregunta fuera de lugar cuando estamos viendo la Filosofía de la Matemática a la luz de los griegos o el pensamiento occidental. Sin embargo, justamente es ahí donde queremos hacer ver, que no sólo la cultura occidental pueden seguir teniendo vigencia, el teorema matemático de la “Puerta del Sol” es una muestra de que ha llegado el momento de rescatar los valores y saberes ancestrales de culturas milenarias que han tenido su propio apogeo y especialmente cuando desde hace casi dos décadas hay una nueva corriente filosófica sustentada por la “Etnomatemática”, que está tratando de revalorizar esos conocimientos como la visión reinvindicadora que intenta explicar el quehacer humano desde su historia, su cultura, su vivencia y actividad cotidiana y la matematización que ella refleja. Toda vez que en la “Cultura Occidental”, el saber no se considera conocimiento, si no tiene validez científica. Luego consideramos que frente a esa situación, evaluando los resultados de ese modelo occidental, se hace imperiosa la

necesidad de buscar respuestas epistemológicas que permitan la relativización contextual en la definición de la Matemática

El capitulo que corresponde a la Topología, y que debía estar a continuación de Geometría no-euclidiana, porque es parte de ella, aparece al final debido a que, en principio consideramos que ese estudio debía realizarse en una otra ocasión, pero, al ver los sistemas numéricos vimos que realmente era necesario tener una idea clarificadora sobre sus precursores y sobre lo que trata. Conocer que el "Análisys Situs" consistente en la intuición geométrica, ya que en la Geometría Métrica al estudiar las propiedades métricas de una figura, se nota que no puede prescindir de las propiedades cualitativas que constituyen esa figura.
Reiteramos, hubiéramos querido estudiar más profundamente, sólo Topología, pero, la falta de más material reciente de ese tipo para este estudio no lo permite, sin embargo queda el desafío para los que han tenido la oportunidad de compartir con nosotros, ahora pueden continuar estudiando esta nueva rama (ni tan nueva) de la Geometría y quien sabe mañana estaremos elaborando un otro material o algún colega que tenga una igual o mayor preocupación que nosotros realice ese trabajo de investigación. Si eso acontece, exclamaremos parafraseando a alguien muy conocido “no hemos vivido en vano”.
El capítulo correspondiente a los números ha servido para mostramos, la manera cómo las teorías matemáticas relativas a otros tipos de números podrían ser reducidas o elaboradas a partir de los números de una especie básica. Es decir que se consigue aritmetizar esas teorías, aunque no lo citamos directamente en el capítulo respectivo, implícitamente hemos visto que la fundamentación axiomática euclidiana sirvió de guía para que más tarde (casi veinte siglos) Peano y Dedekind axiomaticen la Aritmética notamos que las ideas Kantianas del "a priori" matemático fueron vencidas mucho antes en Geometría que en Aritmética.
El edificio numérico (si es que se lo puede llamar así) sirvió, para que partiendo de los números naturales se llegara a otros números superiores o a otros extraños como la raíz cuadrada de 2 y de -1. Es decir que

partiendo de un sistema numérico se llegó a otros sistemas también numéricos.
Para el final quedó hablar sobre Evaluación de la Matemática. El espíritu filosófico de ella está en las cuestiones formuladas y en las respuestas que nosotros debemos darles a través de nuestra práctica docente. Se ha hablado así porque, consideramos importante saber CÓMO estamos facilitando el aprendizaje, y CÓMO verificamos el mismo. Hemos dado en llamarle evaluación de la Matemática (no por hacer una disciplina excepcional de ella), porque es la disciplina, que menos adeptos tiene entre los aprendices, ¿y eso por qué? Porque sencillamente no hemos sabido *valorar* al aprendiz en su *real capacidad de aprender* y se le ha estado administrando unos mal llamados exámenes que no tenían ningún carácter formativo y tampoco eran fielmente informativos.
No se ha dado el concepto tradicional de que Evaluación, es "esto" o "aquello", por el contrario, se hacer ver que la Evaluación o Verificación del aprendizaje es el instrumento que asegura al mismo, la que permite reformular una y otra vez el planeamiento didáctico de la materia. No hemos indicado, qué modalidades se deben utilizar para realizar la evaluación, porque consideramos que ellas ya son de conocimiento general, no obstante quizá sea bueno realizar un estudio especifico al respecto.
Ahora bien seguramente hay una pregunta latente en todos nosotros:
¿Para qué nos ha de servir, el haber realizado este estudio sobre Filosofía de la Matemática? Podríamos responder indicando que, muchas veces no se aprecia de inmediato el valor y la utilidad de un conocimiento, sin embargo al poseer ese conocimiento ya no se es ignorante, cuando precisamos de él, ni nos lamentaremos por no tenerlo.
O quizás ese conocimiento (igual que en los postulados de Euclides), nos ayude a descubrir otro comocimiento, que nos será útil. (Si vale el término) Es decir que el estudio en si nos ha de servir para reformular nuestros conocimientos tradicionales y a través de este cuestionamiento descubriremos, que hemos estado siendo simples máquinas de repetición mecánica y eso es lo que hemos estado haciendo con nuestros

alumnos, otras máquinas. Hemos estado siendo testaferros del sistema mediante el conductismo

Si nosotros los participantes de este estudio, los que nos consideramos motores de la Educación nos hacemos esas preguntas, con mayor razón nuestros alumnos podrán preguntarnos. ¿"*Y para qué, nos sirven los conjuntos, si con ese conocimiento no podemos hacer las cuentas de compra o venta que nuestros padres nos piden que hagamos*"? O, para qué tenemos que aprender a extraer la raíz cuadrada de un número si con una calculadora puedo hacerlo? ¿Qué podremos responder a esas preguntas? A la nuestra, por lo menos podemos decir que nos ayudará (además de lo dicho anteriormente) como producto de la reflexión. A reformular los, programas de aprendizaje de la Matemática, a tornar los temas más creativos menos áridos y dependientes de mecanismos vacíos Nos ayudará a desarrollar mejor el razonamiento matemático para qué a través de él, lleguemos más fácilmente a la solución de los problemas aplicados.

Esperamos que este estudio nos ayudará a mejorar nuestra acción didáctica, porque es hora de que acompañemos el ritmo de la "cibemética", como ya lo indicamos en algún momento, se está introduciendo en la vida de los pueblos y por consiguiente, la adquisición del conocimiento matemático tiene que sufrir modificaciones y con estas modificaciones debemos estar actualizados

Finalmente diremos: ¿Habremos respondido a todas las cuestiones que nos hemos hecho durante el transcurso de este ***Intento de Filosofía de la Matemática***? Si la repuesta es positiva, debemos seguir adelante, pero, si la respuesta es negativa, también debemos seguir avanzando y con mayor decisión y con más cuestionamiento buscándola, hasta encontrarlas.

BIBLIOGRAFIA

Adier Irwing	Mathematics and Mental Growth By The John Day Company New York, USA 1965
Adier Irwing	The New Mathematics By The John Day Company New York, USA 1967
Alexandroff PS	Introducción a la Teoría de Grupos EUDEBA Bs. As, Argentina 1971
Avolio de Cols Susana N, y Martí Marín CJ	Planeamiento y Evaluaciónde la Tarea Escolar Ediciones Troquel. Bs. As, Argentina 1976
Barker Stephen F.	Philosofy of Mathematics. By Prentice-Har Inc. New Jersey U.S.1976
Bockensky J.M	Directrices del Pensamiento Filosófico. Editora Herden Argentina l963
Bunge Mario	Intuition and Scíence. Título original. Intuición y Ciencia. Traducido por Emilio O. Colombo - By Prentice Hall Inc NY.U.S.A. 1962
Casteló Luis A.	Geometrías no-euclidianas EUDEBA Bs. As. Arg. 1976
Delachet André	Le Geometríe Conteporaine, Título original traducido por Ricardo Zelaraván. Cía Fabril Editora S.A. Bs.As Arg.1963
Felix Lucienne	Matemática Moderna. Edit. Kapeluz. Bs.As. Argentina 1968
Frechet M. y Ky Fan	Introducción a la Topología Combinatoria EUDEBA Bs. As. Arg. 1976
Malba Tahan	El hombre que Calculaba. Distribuidora Escolar. S.A. Caracas Venezuela l965
Neto Ernesto Rosa	Espacios Métricos. Editora Nobel San Pablo Brasil 1973
Saviani Demerva1	Educación del Sentido Común p/ la Conciencia Filosófica Editora Cortez Autores Asociados San Pablo Brasil
Trejo Cesar y Bosch Jorge	Enseñanza de la Matemática Moderna EUDEBA Bs. As. Arg. 1976
Varsavsky Oscar.	Algebra para las Escuelas Secundarias Matemática Intuitiva Tomo I. Matemática Deductiva Tomo II. EUDEBA Bs. As. Arg. 1976
Vera Francisco	Veinte Matemáticos Célebres Cía. Fabril Editora S.A. Bs. As. Argentina